

ЛЕКЦИЯ N36.

Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл Коши.

1. Теорема Коши.....	1
2. Формула Коши.....	2
3. Распространение формулы Коши на случай сложных контуров.....	4
4. Интеграл типа Коши.....	5

1. Теорема Коши.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ аналитическая на односвязной области D , то интеграл от $f(z)$ по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру Γ , принадлежащему D , равен нулю.

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

Доказательство. Так как $f(z) = u + iv$ – аналитическая на D функция, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, и выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{в силу которых выражения } vdx + udy \text{ и } udx - vdy \text{ есть полные}$$

дифференциалы некоторых функций. Поэтому криволинейные интегралы по замкнутому

контуру Γ от этих выражений равны нулю $\int_{\Gamma} udx - vdy = 0$, так как $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\int_{\Gamma} vdx + udy = 0, \quad \text{так как } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Но тогда $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (udv - vdu) + i \int_{\Gamma} (vdx + udy) = 0$, что и требовалось доказать.

Примеры.

$$\int_{\Gamma} z^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\int_{\Gamma} e^z dz = 0, \quad \int_{\Gamma} a^z dz = 0 \quad (a > 0)$$

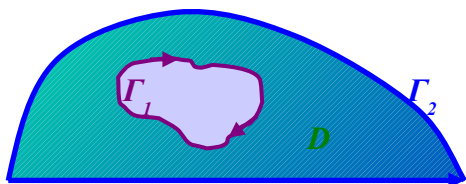
$$\int_{\Gamma} \sin z dz = 0; \quad \int_{\Gamma} \cos z dz = 0;$$

$$\int_{\Gamma} shz dz = 0; \quad \int_{\Gamma} chz dz = 0$$

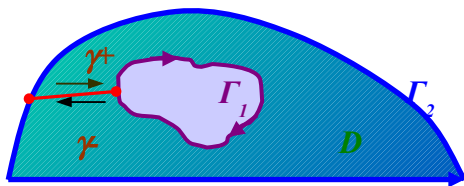
где Γ – произвольный замкнутый кусочно-гладкий контур, а подынтегральные функции -аналитические на плоскости z : они имеют непрерывную производную во всех точках z комплексной плоскости.

Как следствие получаем теорему.

Теорема 2. Пусть область D комплексной плоскости ограничена сложным положительно ориентированным кусочно-гладким контуром Γ , то есть при обходе по Γ точки D остаются слева. Тогда для функции $f(z)$, аналитической на $\bar{D}$, имеет место равенство $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$



Это двусвязная область D с кусочно-гладким контуром $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ – ориентированным положительно. Соединим контуры Γ_1 и Γ_2 гладким куском γ



Ориентируем γ двумя противоположными способами: γ_+ , γ_- . В результате получим новую область D' односвязную, ограниченную ориентированным контуром $\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-$.

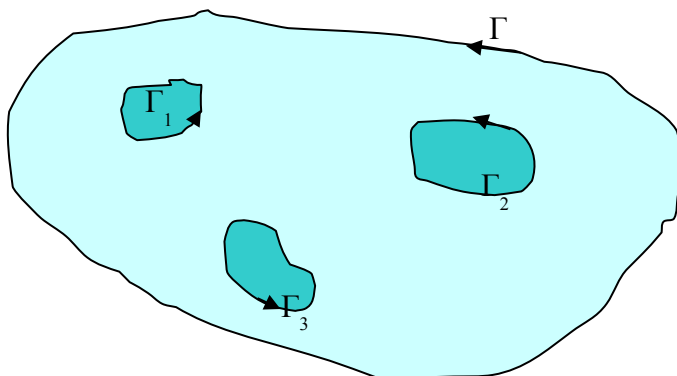
По теореме I $\int_{\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-} f(z) dz = 0$

Но $\int_{\gamma_- + \gamma_+} f(z) dz = \int_{\gamma_-} f(z) dz + \int_{\gamma_+} f(z) dz = 0$, поэтому $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$

Каждый из интегралов $\int_{\Gamma_1} f(z) dz, \int_{\Gamma_2} f(z) dz$ при этом может и не равняться нулю.

Теорема 3. Пусть область D ограничена внешним контуром Γ , ориентированным против часовой стрелки, и внутренними контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$, ориентированными тоже против часовой стрелки и пусть на $\bar{D}$ задана аналитическая функция $f(z)$.

Тогда имеет место равенство $\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} f(z) dz$ (*)



Действительно, если считать, что Γ_k^- – тот же контур, что и Γ_k , но ориентированный по часовой стрелке, то по теореме 2: $\int_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = 0$, откуда следует (*), так как

$$\int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma_k} f(z) dz$$

Если $N=1$, то $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz$ (**).

2. Формула Коши.

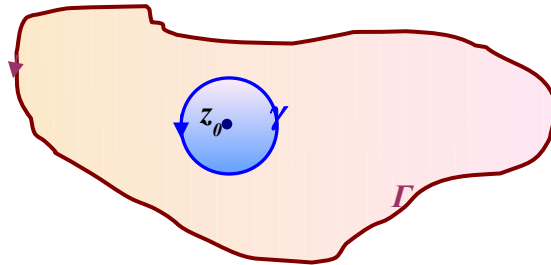
Пусть G есть односвязная область, ограниченная произвольной кусочно-гладкой линией Γ , и $f(z)$ – функция, аналитическая в замкнутой области $\bar{G}$. Это значит, что $f(z)$ имеет определенную конечную производную в каждой точке некоторой области G' , содержащей $\bar{G}$. Формула Коши выражает значение функции $f(z_0)$ во всякой точке, внутренней к линии Γ , через значения этой функции на контуре Γ . Формула имеет вид:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (1),$$

где z_0 – любая точка внутри Γ и, интегрирование совершается по контуру Γ в положительном направлении.

Для доказательства рассмотрим функцию $\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ (2).

Эта функция $\varphi(z)$ есть аналитическая во всех точках замкнутой области $\bar{G}$, кроме точки $z=z_0$. Описывая около точки z_0 , как центра окружность γ произвольно малого радиуса ρ , целиком лежащую в области G , мы видим, что $\varphi(z)$ будет аналитической функцией во всех точках, лежащих между контурами Γ и γ , включая и сами контуры.



Следовательно, на основании теоремы Коши, имеем $\int_{\Gamma} \varphi(z) dz = \int_{\gamma} \varphi(z) dz$ (3).

Равенство (3) показывает, что значение $\int_{\gamma} \varphi(z) dz$ не зависит от радиуса ρ вспомогательной окружности γ , будучи постоянным числом, равным значению $\int_{\Gamma} \varphi(z) dz$. Чтобы определить

это постоянное значение $\int_{\Gamma} \varphi(z) dz$ заметим, что функция $\varphi(z)$ стремится к определенному конечному пределу, когда точка z стремится к z_0 . Действительно, из равенства (1) следует:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Следовательно, если принять $f'(z_0)$ за значение функции $\varphi(z)$ в точке $z=z_0$, то $\varphi(z)$ становится непрерывной функцией всюду в замкнутой области $\bar{G}$, и мы можем предположить: $|\varphi(z)| < M$, где M – постоянное, какова бы ни была точка z_0 области G .

Пользуясь последним неравенством, получаем $|\int_{\gamma} \varphi(z) dz| < M \cdot 2\pi \rho$, откуда следует, что

$\int_{\gamma} \varphi(z) dz = 0$, так как ρ можно принять сколь угодно малым, а значение интеграла есть постоянное число.

Обращаясь к равенству (3), перепишем его так: $\int_{\Gamma} \varphi(z) dz = 0$ (3').

Заменяя в (3') $\varphi(z)$ по формуле (2), получим, $\int_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$, или

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0) \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} \quad (4)$$

Так как $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, то (4) примет вид: $\int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0) \cdot 2\pi i$ или $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Решим пример: докажем, $\int_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, где L – есть окружность с центром в точке z_0 , ориентированная против часовой стрелки.

В самом деле, уравнение L можно записать в форме $z = z_0 + \rho e^{it}$ ($0 \leq t < 2\pi$), где ρ – радиус окружности L . Поэтому, $\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it} dt}{\rho e^{it}} = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$

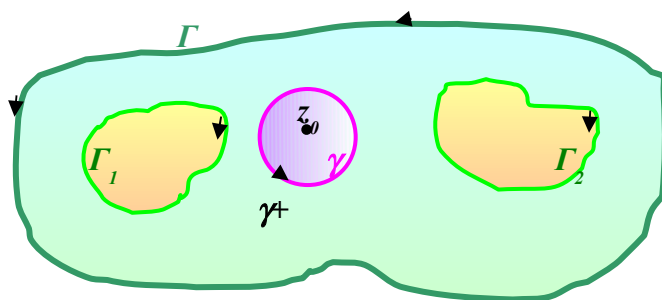
А из теоремы (3) при $N=1$ следует, что это верно, если окружность заменить на любой замкнутый кусочно-гладкий контур L' , содержащий внутри точку z_0 и ориентированный против часовой стрелки.

Аналогично, можно доказать, что $\int_L (z - z_0)^n dz = 0$

3. Распространение формулы Коши на случай сложных контуров.

Покажем, что установленная формула Коши может быть распространена на случай многосвязной области G . Итак, рассмотрим многосвязную область G , границей которой является сложный контур Γ , состоящий из конечного числа кусочно-гладких замкнутых линий. Предполагая $f(z)$ аналитической функцией в замкнутой области $\bar{G}$, установим

формулу Коши $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$ (5), где z_0 – любая точка области G , а интегрирование совершается вдоль сложного контура Γ в положительном направлении.



Окружим точку z_0 замкнутым контуром γ , настолько малым, чтобы все точки этого контура γ вместе с его внутренними точками принадлежали G . Рассмотрим сложный контур $\Gamma' = \Gamma + \gamma^-$, полученный от присоединения к первоначальному контуру Γ линии γ проходимой в отрицательном направлении. Область, ограниченную контуром Γ' , обозначим G' . Очевидно, функция $\frac{f(z)}{z - z_0}$ будет аналитической в замкнутой области $\bar{G}'$, а потому на основании теоремы Коши имеем:

$\int_{\Gamma'} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 0$ или $\int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} + \int_{\bar{\gamma}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 0$, откуда находим:

$$\int_{\Gamma'} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \quad (6),$$

где интегрирование совершается по контурам Γ и γ в положительном направлении. Так как функция $f(z)$ аналитическая во всех точках, внутренних к контуру γ включая и точки самого контура, то на основании предыдущего пункта, имеем $\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$.

Из (6) получим $\int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$ или $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$

Выражение $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$, где $f(z)$ – функция, аналитическая в замкнутой области $\bar{G}$, границей которой служит контур Γ , называется **интегралом Коши**.

Интеграл Коши изображает данную функцию $f(z)$ во всякой точке z_0 , внутренней к контуру Γ , то есть лежащей в области G . Очевидно, во всякой точке z_0 , лежащей вне замкнутой области $\bar{G}$, интеграл Коши равен нулю. В самом деле, функция $\frac{f(z)}{z - z_0}$ есть аналитическая во всех точках замкнутой области $\bar{G}$, если точка z_0 лежит вне этой области G . Поэтому, на основании теоремы Коши: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 0$.

4. Интеграл типа Коши.

Пусть L – произвольная кусочно-гладкая линия, замкнутая или незамкнутая, и $\varphi(z_0)$ – определенная вдоль L непрерывная функция. Выражение $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(z)dz}{z - z_0}$ имеет определенное значение для каждой точки z_0 , не лежащей на L , и, следовательно, определяет однозначную функцию $F(z_0)$ во всех точках z_0 , не принадлежащих L .

Выражение $F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(z)dz}{z - z_0}$ (8) называется **интегралом типа Коши**.

Теорема. Функция $F(z_0)$, определенная интегралом типа Коши (8), есть аналитическая во всякой односвязной области G , не содержащей точек линии L , и для ее производной имеет место формула

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(z)dz}{(z - z_0)^2} \quad (9).$$

Теорема. Функция $F(z_0)$, определенная интегралом (8), имеет в каждой точке z_0 , лежащей вне L , производные всех порядков, для которых имеет место формула:

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$