

ЛЕКЦИЯ N35.

Конформные отображения.

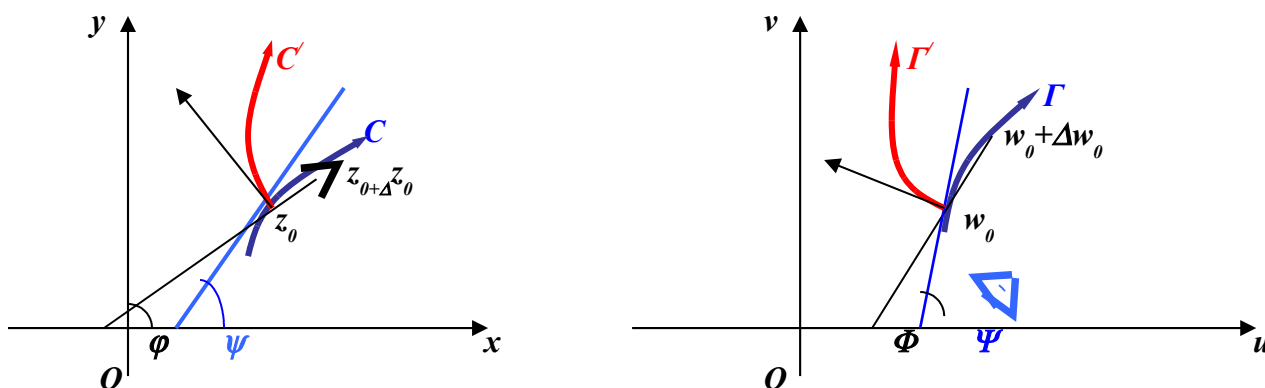
Интегрирование функций комплексного переменного.

1. Конформные отображения.....	1
2. Интегрирование функций комплексного переменного.....	4
3. Основные свойства интеграла по комплексному переменному.....	5

1. Конформные отображения.

Геометрический смысл аргумента производной.

Пусть $w=f(z)$ – функция, аналитическая в области D . Значения функции $w=u+iv$ будем изображать точками в плоскости uOv . Каждой точке $z=x+yi$ в плоскости независимого переменного z будет соответствовать одна точка $w=u+iv$ в плоскости функции w .



При движении точки z в плоскости xOy по некоторой линии C соответствующая ей точка w будет описывать в плоскости uOv линию Γ , являющуюся образом линии C . Пусть z_0 – произвольная точка области D и C – линия, данная вместе со своим направлением, выходящая из этой точки и имеющая определенную касательную в точке z_0 . Предположим, что $f'(z) \neq 0$.

В плоскости uOv образом линии C будет линия Γ , выходящая из точки $w_0=f(z_0)$. Если уравнение произвольно выбранной линии C есть $z=z(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), то уравнение линии Γ получим, если заменим в равенстве $w=f(z)$ переменное z через $z(t)$: $w=f[z(t)]=w(t)$; $0 \leq t \leq 1$.

Чтобы выяснить геометрический смысл производной $f'(z_0)$, представим комплексное число $f'(z_0)$ в тригонометрической форме: $f'(z_0)=r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ и выясним геометрическое значение аргумента α производной и ее модуля r . Возьмем произвольную точку $z_0 + \Delta z_0$ на линии C и обозначим через $w_0 + \Delta w_0$ соответствующую ей точку на плоскости uOv , лежащую на линии Γ . При стремлении точки $z_0 + \Delta z_0$ по линии C к точке z_0 соответствующая ей точка $w_0 + \Delta w_0$ движется по линии Γ к точке w_0 , причем Δz_0 и Δw_0 одновременно стремятся к нулю. Из равенства $f'(z_0) = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ находим:

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = r \quad (1).$$

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \alpha \quad (2) \quad (\text{с точностью до кратных } 2\pi).$$

Так как аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя, $\arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \arg \Delta w_0 - \arg \Delta z_0$ и равенство (2) примет вид: $\lim \arg \Delta w_0 - \lim \arg \Delta z_0 = \alpha$ (2').

Выясним геометрический смысл (2').

Очевидно (смотри рисунок), $\Delta z = (z_0 + \Delta z_0) - z_0$ – изображается вектором, соединяющим точку z_0 с точкой $z_0 + \Delta z_0$; также Δw_0 есть вектор, идущий от точки w_0 к точке $w_0 + \Delta w_0$. Следовательно, $\arg \Delta z_0$ – это угол φ между положительным направлением оси Ox и соответствующим вектором Δz_0 , а $\arg \Delta w_0$ – есть угол Φ оси Ou с вектором Δw_0 .

Итак, (2') – это $\lim \Phi - \lim \varphi = \alpha$ (2*).

В пределе направление вектора Δz_0 совпадает с направлением касательной к линии C в точке z_0 , а направление вектора Δw_0 – с направлением касательной к линии Γ в точке w_0 , которая необходимо должна существовать вследствие равенства (2*), то есть $\Psi - \psi = \alpha$ или $\Psi = \psi + \alpha$ (3).

Будем считать положительные направления осей Ox и Ou совпадающими между собой. Тогда из (3) очевидно, что α – это угол, на который поворачивается касательная к линии C в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ или, иначе, α есть угол между первоначальным и отображенным направлениями. При изменении направления линии C будут изменяться ψ и Ψ , но α остается постоянным. Следовательно, проводя из точки z_0 другую линию C' , и обозначая соответствующую ей линию Γ' , заключим, что $\Psi = \psi' + \alpha$ (4).

Вычитая из (4) (3) получим: $\Psi - \Psi = \psi' - \psi$ (5).

Итак, две произвольные линии, выходящие из точки z_0 , отображаются в две соответствующие линии, выходящие из точки $w_0 = f(z_0)$, так что угол между касательными к данным и отображенным линиям будет один и тот же, как по величине, так и по направлению.

Отображение с помощью **аналитической функции** обладает свойством сохранения (**консерватизма**) углов во всех точках, где производная $f'(z)$ не равна нулю.

Геометрический смысл модуля производной.

Равенство (1) запишем так: $\lim \frac{|\Delta w_0|}{|\Delta z_0|} = r$ (6).

Геометрически $|\Delta z_0|$ обозначает длину вектора Δz_0 , то есть расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z_0$, аналогично $|\Delta w_0|$ есть расстояние между w_0 и $w_0 + \Delta w_0$. Равенство (6) показывает, что отношение бесконечно малого расстояния между отображенными точками к бесконечно малому расстоянию между первоначальными точками, в пределе равное $r = |f'(z_0)|$, не зависит от направления линии C . Из этого ясно, что $r = |f'(z_0)|$ можно рассматривать как величину масштаба в точке z_0 при изображении с помощью функции $w=f(z)$. Если $r > 1$, то масштаб увеличивается, то есть происходит **растяжение** произвольного бесконечно малого элемента, выходящего из точки z_0 ; если $r < 1$, то, наоборот, происходит **сжатие**; при $r = 1$ масштаб остается неизменным.

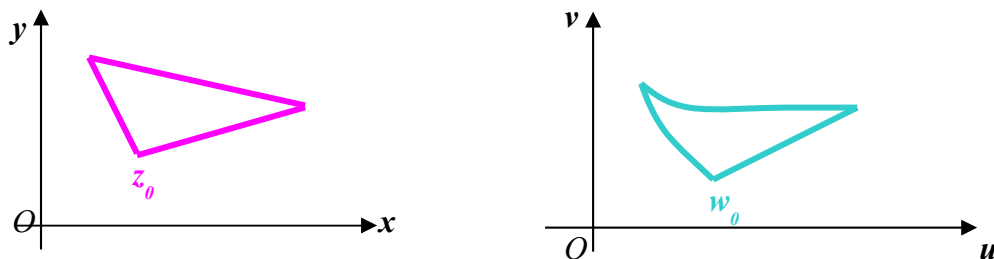
Так как $r = |f'(z_0)|$ зависит только от z_0 и не зависит от направления линии C , то масштаб будет одним и тем же независимо от направления.

Итак, отображение с помощью **аналитической функции** $w=f(z)$ обладает в каждой точке z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$, **растяжением**, не зависящем от направления.

Конформное отображение.

Итак, всякое аналитическое отображение, то есть отображение, устанавливаемое с помощью аналитической функции $w=f(z)$, обладает в каждой точке z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$, двумя свойствами: 1) **консерватизма углов**; 2) **постоянства растяжений**.

Если мы возьмем в плоскости комплексного переменного z бесконечно малый треугольник, одна из вершин которого z_0 , то ему в плоскости переменного w будет соответствовать бесконечно малый криволинейный треугольник с вершиной в точке w_0 .



Соответственные углы в этих треугольниках будут равны в силу свойства консерватизма углов; отношение их соответственных сторон с точностью до бесконечно малых будет равно одному и тому же постоянному числу $r \neq 0$.

Такие два бесконечно малых треугольника называются подобными между собой.

Итак, аналитическое будет отображением подобия в бесконечно малом. Отображение, обладающее свойством консерватизма углов и свойством постоянства растяжений, называется **конформным отображением**.

Итак, всякое отображение, устанавливаемое с помощью аналитической функции $w=f(z)$, есть конформное во всех точках, где производная этой функции не равна нулю. Из предыдущего легко видеть, что и обратно, если однозначная функция $w=f(z)$ дает конформное отображение, то функция $f(z)$ будет аналитической с производной, не равной нулю.

Конформное отображение II рода.

При аналитическом отображении углы между соответствующими направлениями сохраняются не только по величине, но и по направлению отсчета.

Всякое отображение плоскости комплексного переменного z (или ее части) на плоскости w , при котором углы сохраняются по величине, а направление же их отсчета меняется на обратное, обладающее еще свойством постоянства растяжений, называется **конформным отображением II рода**.

Пусть дано отображение $w = \bar{z}$. Будем изображать переменные w в той же плоскости, что и $\bar{z}$. Видим, что всякая точка z переходит в точку ей симметричную относительно действительной оси. Ясно, что при таком отображении всякие два направления, выходящие из точки z и образующие между собой некоторый угол α , перейдут в два соответствующих направления, симметричных с первыми, угол между которыми будет $-\alpha$, то есть величина углов сохраняется, а направление отсчета меняется. Еще это отображение обладает свойством постоянства растяжений, так как при нем не происходит вообще никакого изменения масштаба.

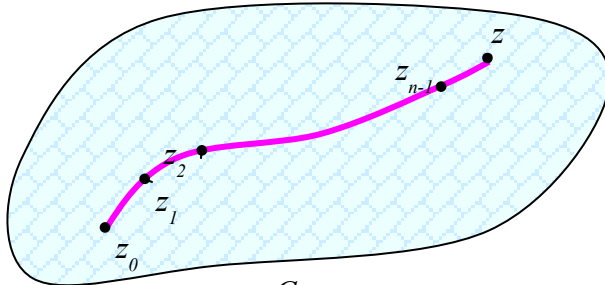
Поэтому, $w = \bar{z}$ - конформное отображение II рода.

Предполагая теперь $f(z)$ аналитической функцией, мы можем заключить, что отображение $w = \bar{f}(z)$ будет конформным II рода.

Итак, всякое преобразование, устанавливаемое с помощью функции, значение которой являются сопряженными со значениями аналитической функции, есть конформное II рода. Обратно, всякое конформное отображение II рода осуществляется с помощью функции, сопряженной с некоторой аналитической функцией.

2. Интегрирование функций комплексного переменного.

Пусть $w=f(z)$ есть произвольная непрерывная функция комплексного переменного z , определенная в некоторой области G плоскости переменного z , и C – произвольная гладкая линия, лежащая в этой области, с началом в точке z_0 и концом в точке z .



Разобьем дугу z_0z линии C на n частичных дуг с помощью точек $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n=z$, расположенных последовательно в положительном направлении линии C .

Каждой частичной дуге поставим в соответствие число $f(z_k)\Delta z_k$, полученное от умножения значения данной функции в левом конце этой дуги на соответствующее этой дуге приращение Δz_k переменного z : $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Составим, далее, сумму всех таких произведений, распространив ее на все частичные дуги:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k) \Delta z_k \quad (1).$$

Заставляя максимум длин всех частичных дуг стремиться к нулю, докажем, что выражение (1) стремится к определенному конечному пределу, не зависящему от того закона, по которому все частичные дуги стремятся к нулю. С этой целью, введя обозначения $z_k = x_k + y_k i$,

$$f(z_k) = u(x_k, y_k) + v(x_k, y_k)i = u_k + v_k i; \quad \Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k$$

представим выражение (1) в виде

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k) \Delta z_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k + v_k i)(\Delta x_k + i \Delta y_k) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{k=n-1} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k) \quad (2).$$

Заставляя максимум длин всех частичных дуг стремиться к нулю, мы видим, что обе суммы правой части последнего равенства (2) стремятся соответственно к пределам:

$$\int_C u dx - v dy \quad \text{и} \quad i \int_C v dx + u dy$$

Следовательно, левая часть равенства (2) стремится к определенному конечному пределу, когда длины всех частичных дуг по произвольному закону стремятся к нулю. Этот предел мы назовем интегралом от $f(z)dz$ вдоль линии C и обозначим через $\int_C f(z)dz$. Итак,

$$\int_C f(z)dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \quad (3).$$

Формула (3) дает выражение интеграла по комплексному переменному через два действительных криволинейных интеграла. Ее можно переписать в следующей форме:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + vi) \cdot (dx + i dy) \quad (3).$$

Для фактического вычисления интеграла по комплексному переменному, предполагая уравнение линии C в виде $z=z(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta$), имеем:

$$\int_c f(z)dz = \int_a^\beta \{u[z(t)]x'(t) - v[z(t)]y'(t)\}dt + i \int_a^\beta \{v[z(t)]x'(t) + u[z(t)]y'(t)\}dt =$$

$$= \int_a^\beta f[z(t)]z'(t)dt \quad (4)$$

или

$$\int_c f(z)dz = \int_a^\beta R(t)dt + i \int_a^\beta I(t)dt \quad (4'), \text{ где } R(t) \text{ и } I(t) - \text{ действительная часть и коэффициент при}$$

мнимой части выражения $f[z(t)]z'(t)$.

Если мы имеем произвольную кусочно-гладкую линию Γ , состоящую из гладких линий $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, то по определению полагаем

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz \quad (5).$$

3. Основные свойства интеграла по комплексному переменному.

Ряд свойств непосредственно вытекает из определения интеграла

1) $\int_{\Gamma^-} f(z)dz = - \int_{\Gamma^+} f(z)dz$, где Γ^- и Γ^+ - обозначают один и тот же путь, проходимый соответственно в положительном и отрицательном направлениях;

2) $\int_\Gamma af(z)dz = a \int_\Gamma f(z)dz$ (a - постоянная);

3) $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz$;

4) $\int_\Gamma (f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z))dz = \int_\Gamma f_1(z)dz + \int_\Gamma f_2(z)dz + \dots + \int_\Gamma f_n(z)dz$.

5) Если вдоль линии Γ имеет место неравенство $|f(z)| \leq M$, где M есть постоянное число, то, обозначая через l длину линии Γ , имеем: $|\int_\Gamma f(z)dz| \leq Ml$

Действительно, $|\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \leq Ml$,

так как $\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|$ обозначает длину ломаной, вписанной в Γ .

Переходя к пределу, из последнего неравенства получим $|\int_\Gamma f(z)dz| \leq Ml$.