

ЛЕКЦИЯ N33.

Функции комплексного переменного. Пределы. Непрерывность. Элементарные функции. Дифференцирование ФКП. Свойства производных.

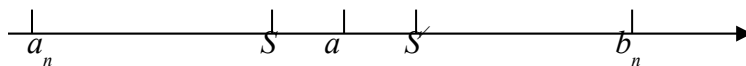
1. Последовательности комплексных чисел. Предел.....	1
2. Ограниченные и неограниченные последовательности комплексных чисел.....	2
3. Сходящаяся последовательность комплексных чисел.....	3
4. Функции комплексного переменного.....	3
6. Сопряженные гармонические функции.....	8
7. Свойства производных.....	8

1. Последовательности комплексных чисел. Предел.

Ранее было введено понятие комплексного числа и определены основные алгебраические операции для комплексных чисел. Теперь нужно рассмотреть основную операцию анализа бесконечно малых – переход к пределу в комплексной области.

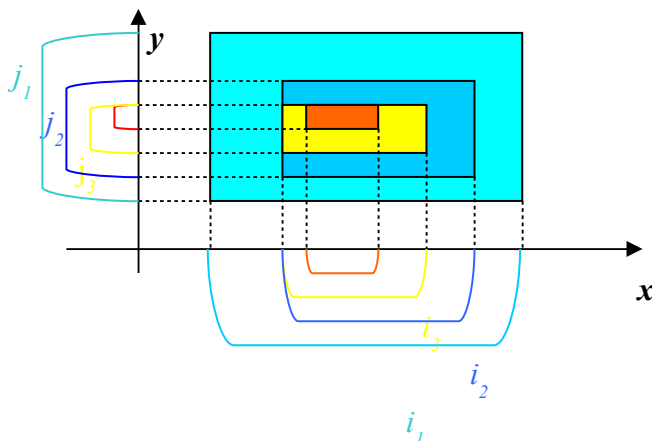
Вся теория пределов действительных чисел может быть построена на одном принципе, который в своей геометрической форме выражается таким образом.

Пусть дана на числовой прямой последовательность отрезков $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$, и пусть длины этих отрезков стремятся к нулю при неограниченном возрастании номера n . *Существует одна и только одна точка, которая принадлежит всем отрезкам данной последовательности.*



Заметим, что две различные точки S и S' не могут принадлежать всем отрезкам: действительно, в противном случае длины всех отрезков i_n были бы не меньше положительного расстояния между точками S и S' , что невозможно, так как с неограниченным возрастанием n длина отрезка i_n стремится к нулю. Поэтому двух точек, общим всем отрезкам нашей последовательности, существовать не может. Этот принцип выражает свойство непрерывности числовой прямой.

Все сказанное легко распространяется на случай комплексной числовой плоскости. Пусть дана на плоскости последовательность прямоугольников $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ со сторонами, параллельными осям координат, из которых каждый содержит следующий, и пусть диагональ прямоугольника r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n .



Существует единственная точка, принадлежащая всем прямоугольникам данной последовательности.

Для доказательства рассмотрим проекции всех прямоугольников r_n на действительную и мнимую оси. На действительной оси получим последовательность отрезков $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$, из которых каждый отрезок содержит следующий; на мнимой оси также получим последовательность отрезков $j_1, j_2, \dots, j_n, \dots$ таких, что каждый отрезок содержит следующий.

Так как по условию диагональ прямоугольника r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n , то длины отрезков i_n и j_n должны также стремиться к нулю. По доказанному выше принципу, на действительной оси существует одна точка a^* , принадлежащая всем отрезкам i_n , аналогично на мнимой оси b^* принадлежит всем отрезкам j_n . Очевидно, что точка плоскости с координатами a^*, b^* принадлежит всем прямоугольникам r_n .

Такая точка – единственная, то есть не может существовать двух различных точек, принадлежащих всем прямоугольникам r_n . Действительно, расстояние между этими точками было бы не больше диагонали прямоугольника r_n , что невозможно, так как по условию эта последняя стремится к нулю при неограниченном возрастании n .

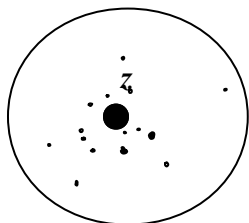
Пусть есть бесконечная последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$

Определение. Число z называется предельным числом для данной последовательности, если оно удовлетворяет условию: при любом положительном сколь угодно малом ε неравенство $|z - z_n| < \varepsilon$ выполняется для бесконечного множества натуральных чисел n .

Будем рассматривать числа $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, как точки числовой плоскости. При этом любой круг с центром в точке z будем называть окрестностью этой точки.

Заметив, что $|z - z_n|$ есть расстояние между точками z и z_n , будем говорить, что точка z есть предельная точка для последовательности точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, если в сколь угодно малой окрестности точки z лежат точки, изображающие бесконечное множество членов данной последовательности.

То есть, около предельной точки z образуется сгусток точек из последовательности $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$

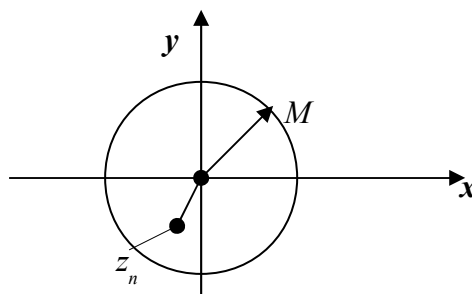


Примечание. Числа последовательности, равные между собой, изображаются одной точкой, называемой **кратной** точкой. Кратность равна количеству равных чисел, изображением которых она является.

2. Ограниченные и неограниченные последовательности комплексных чисел.

Определение. Последовательность комплексных чисел называется **ограниченной**, если модули всех чисел этой последовательности остаются меньше некоторого положительного числа M : $|z_n| < M$.

В противном случае последовательность чисел называется **неограниченной**.



Заметим, что в случае ограниченной последовательности точек существует круг с центром в нулевой точке достаточно большого постоянного радиуса M , внутри которого лежат все точки данной последовательности, как показано на рисунке.

Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Всякая бесконечная ограниченная последовательность точек имеет по крайней мере одну предельную точку.

Доказательство: пусть имеем ограниченную последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$

Все точки этой последовательности лежат внутри некоторого прямоугольника r_1 со сторонами, параллельными осям координат. Разделив стороны прямоугольника r_1 пополам и соединяя середины противоположных сторон, мы разобьем прямоугольник r_1 на четыре конгруэнтных прямоугольника. Среди этих четырех имеется по крайней мере один, содержащий бесконечное множества точек данной последовательности, так как в противном случае в прямоугольнике r_1 было бы конечное число точек последовательности. Назовем этот прямоугольник r_2 и снова разделим его на четыре конгруэнтных. По крайней мере в одном из них, r_3 , снова лежит бесконечное множество точек данной последовательности. Продолжая процесс неограниченно, получим бесконечную последовательность прямоугольников $r_1, r_2, r_3, \dots$, каждый из которых содержит следующий с диагоналями, стремящимися к нулю и таких, что каждому прямоугольнику r_n принадлежит бесконечное множество точек данной последовательности.

На основании принципа вложенных прямоугольников мы заключаем, что существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам r_n . Эта точка будет предельной для данной последовательности точек.

Действительно, описав около этой точки, как центра, окружность произвольно малого радиуса ε , мы видим, что, начиная с некоторого достаточно большого n , все прямоугольники r_n будут лежать внутри этой окружности, и так как в каждом прямоугольнике r_n имеется бесконечное множество точек данной последовательности, то и внутри проведенной окружности будет находиться бесконечное множество таких точек.

Итак, построенная точка – предельная для данной последовательности точек, что и требовалось доказать.

3.Сходящаяся последовательность комплексных чисел.

Определение. Если ограниченная последовательность чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ имеет единственное предельное число z , то говорят, что эта последовательность сходится к числу z то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Геометрически последовательность точек z_n сходится к точке z , если все точки этой последовательности, кроме, может быть, конечного числа точек, лежат внутри сколь угодно малой окрестности точки z .

Основные теоремы теории пределов.

Пусть даны две последовательности комплексных чисел:

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots; \quad \text{и} \quad z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm z'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \neq 0)$$

4.Функции комплексного переменного.

Пусть даны две плоскости комплексных чисел $z=x+iy$ и $w=u+iv$

Рассмотрим некоторое множество точек D в плоскости z и множество G в плоскости w .

Если каждому числу $z \in D$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное

комплексное число $w \in G$, то говорят, что на множестве D задана однозначная функция комплексного переменного, отображающая множество D в множество G : $w=f(z)$.



Множество D называют областью определения функции $f(z)$. Если каждая точка множества G является значением функции, то говорят, что G – область значений этой функции или образ множества D при помощи функции f ($G=f(D)$).

Говорят еще, что функция f отображает D на G .

Можно записать: $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, $(x, y) \in D$, где $u(x, y)=\operatorname{Re} f(z)$; $v(x, y)=\operatorname{Im} f(z)$ – действительные функции от переменных x, y .

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько разных значений w , то функция $w=f(z)$ называется многозначной.

Понятие предела и непрерывности функции комплексного переменного вводят аналогично этим понятиям для функции действительного переменного, необходимо лишь всюду вместо абсолютных величин писать модуль комплексного числа.

Говорят, что функция $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ имеет предел в точке z_0 , равный числу $A=a+ib$, если $\lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} |f(z)-A| = 0$ и пишут $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$

Можно записывать это в виде двух равенств $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a$; $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b$

Свойства пределов аналогично таковым для функции действительного переменного:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad (\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0) \end{aligned} \quad (1)$$

Формулы надо понимать так: если пределы, стоящие в правых частях равенств существуют, то существуют и пределы, стоящие в их левых частях, и выполняется соответствующее равенство.

Функция $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ называется непрерывной в точке z_0 , если для нее выполняется свойство $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ или

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0); \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$$

Из (1) следует, что сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке z_0 комплексных функций $f(z)$ и $g(z)$ есть непрерывная функция в этой точке.

Понятие области. Линия Жордана.

Вернемся к понятию области определения функции.

Определение. Точка P называется внутренней точкой множества E , если все точки достаточно малого круга с центром в точке P принадлежат этому множеству E .

Определение. Областью назовем множество G точек плоскости, удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) G состоит из одних внутренних точек;
- 2) Любые две точки множества можно соединить ломаной с достаточно большим числом звеньев так, чтобы все точки этой линии принадлежали самому множеству.

Рассмотрим теперь некоторую точку Q . Она может быть двоякого типа: либо все точки достаточно малого круга с центром в этой точке Q не принадлежат области G – такую точку Q мы назовем *внешней* точкой области G , либо в этом круге будут точки области G – такую точку Q назовем *граничной* точкой области G .

Совокупность граничных точек назовем *границей* области G .

Множество, состоящее из области G и ее границы, называется замкнутой областью и обозначается $\bar{G}$.

Область G называется *односвязной*, если любая непрерывная замкнутая самонепересекающаяся кривая, проведенная в G , ограничивает некоторую область D , целиком принадлежащую G . Область, не обладающую этим свойством, будем называть *многосвязной*.

5. Дифференцирование функций комплексного переменного.

Понятие производной.

Пусть $w=f(z)$ есть однозначная функция, определенная в области G плоскости комплексного переменного z .

Определение дифференцируемости по комплексному переменному с формальной стороны совершенно аналогично соответствующему определению для функций действительного переменного.

Определение. Функция $w=f(z)$ дифференцируема в точке z области G , если отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$, где $z+h$ – любая точка области, стремится к определенному

конечному пределу, когда $\Delta z=h$ любым образом стремится к нулю при постоянном z . Предел этого отношения называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается

через $f'(z)$, так что $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$ (1).

Равенство (1) означает: при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и данном z найдется соответствующее положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что неравенство $\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon$ имеет место для всех h , для которых $|h| < \delta$.

Функция $w=f(z)$, дифференцируемая в точке z , называется *монотонной* в этой точке.

Понятие функции, аналитической в области.

Если функция $w=f(z)$ является монотонной в каждой точке области G , то говорят, что она аналитическая в области G . Итак, по определению, однозначная функция называется аналитической в области G , если в каждой точке этой области она имеет определенную конечную производную.

Таким образом, функция может быть аналитической только в некоторой области; однако и о каждой отдельной точке такой области говорят, что в ней функция аналитическая. При этом важно заметить, что функция, аналитическая в точке, по определению должна быть аналитической в некоторой окрестности этой точки.

Так как определение производной функции комплексного переменного совершенно аналогично с формальной стороны соответствующему определению для функции действительного переменного, то все известные правила дифференцирования легко могут быть перенесены в комплексную область. Отсюда следует, что целая рациональная функция есть аналитическая во всей плоскости; функция рациональная есть аналитическая во всей плоскости комплексного переменного, кроме точек, в которых ее знаменатель обращается в нуль.

Понятие дифференциала.

Подобно производной понятие дифференциала для функции комплексного переменного с формальной стороны аналогично соответствующему понятию дифференциала Ф.Д.П.

Итак, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$ имеем $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \eta$ (2), где η стремится к нулю вместе с Δz .

Отсюда, $\Delta w = f'(z)\Delta z + \eta\Delta z$ (3).

Формула (3) показывает, что бесконечно малое приращение функции Δw есть сумма двух бесконечно малых величин $f'(z)\Delta z$ и $\eta\Delta z$, причем $f'(z)\Delta z$ – бесконечно малая того же порядка, что и Δz ; второе слагаемое формулы (3) всегда есть бесконечно малая величина высшего порядка относительно Δz .

Первое слагаемое формулы (3) $f'(z)\Delta z$ называется линейной частью приращения Δw , или иначе, дифференциалом функции w и обозначается так: $dw = f'(z)\Delta z$ (4).

В частности, при $w=z$ из (4) находим $dz = 1\Delta z$, то есть $dz = \Delta z$, а значит, $dw = f'(z)dz$

Откуда, $f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df(z)}{dz}$ (5).

Формула (2) получена в предположении, что функция $w=f(z)$ в точке z имеет конечную производную. Из этой формулы усматриваем, что при Δz бесконечно малом Δw тоже бесконечно мало, а это значит, что данная функция непрерывна в точке z , то есть всякая функция, дифференцируемая в точке, необходимо непрерывна в этой точке.

Условия Коши-Римана.

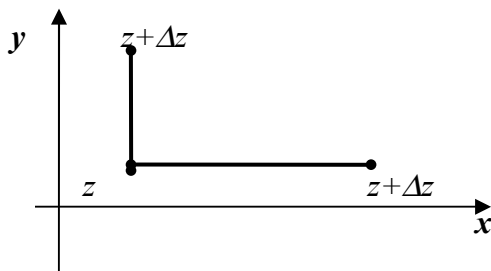
Пусть $w=f(z)=u+iv$ есть однозначная функция комплексного переменного $z=x+yi$, определенная в области G . Эта функция будет известна, если даны две функции u и v двух действительных переменных x , y . Если функции u и v взять независимо друг от друга, то функция $f(z)$, вообще говоря, не будет дифференцируемой, несмотря на то, что обе функции u и v имеют каждая частные производные относительно x и y .

Выведем условия, связывающие u и v . Пусть функция $f(z)$ в некоторой точке z имеет определенную конечную производную. Таким образом, имеем:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z) \quad (6).$$

Так как $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ может стремиться к нулю по произвольному закону, то в частности, мы можем считать $\Delta y = 0$ и Δx стремящимся к нулю.

Геометрически это означает, что мы заставляем точку $z + \Delta z$ приближаться к точке z по прямой линии, параллельной действительной оси.



При этом условии равенство (6) дает: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = f'(z)$, или $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = f'(z)$,

что может быть записано в виде $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z)$

Аналогично, принимая $\Delta x=0$, то есть заставим точку $z+\Delta z$ приближаться к точке z по прямой линии, параллельной мнимой оси, получим из равенства (6): $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = f'(z)$

или $-i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = f'(z)$, что можно записать так: $-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = f'(z)$ (7')

Так как правые части равенств (7) и (7') равны между собой, то должны быть равны и левые части.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8).$$

Сравнивая между собой в обеих частях последнего равенства (8) действительные и мнимые части, получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (С.-R.)

Итак мы видим, что если функция $w=u+iv$ дифференцируема в точке $z=x+iy$, то в этой точке существуют частные производные функций u и v , причем эти последние связаны между собой условиями (С. –R.).

Эти условия носят название условий Коши-Римана (так как эти условия были найдены значительно раньше в работах Даламбера и Эйлера, то их называют также условиями Даламбера-Эйлера).

Итак, показано, что условия (С.-R.) необходимы для того, чтобы функция $w=f(z)$ была монотонной в точке z . Покажем, что эти условия достаточны при дополнительном условии, что функции u и v дифференцируемы в рассматриваемой точке: $z=x+iy$, то есть что $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \eta_1$; $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \eta_2$, где η_1 и η_2 – бесконечно малая величина высшего порядка, чем $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Заметив это, мы можем записать: $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy)}{dx + idy} + \frac{\eta_1 + i\eta_2}{dx + idy}$

Заменяя здесь $\frac{\partial u}{\partial y} u \frac{\partial v}{\partial y}$ по формуле (С.-R.) и замечая, что отношение $\frac{\eta_1 + i\eta_2}{dx + idy} = \eta_3$ есть величина бесконечно малая вместе с $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, мы для отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ получим

следующие выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + i \frac{\partial v}{\partial x} dx + i \frac{\partial u}{\partial x} dy}{dx + idy} + \eta_3 \quad \text{или} \quad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (dx + idy)}{dx + idy} + \frac{i \frac{\partial v}{\partial x} (dx + idy)}{dx + idy} + \eta_3 = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_3 \end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при Δz , стремящемся к нулю, получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Итак: для функции $w=f(z)$, аналитической в области G , условие (С.-R.) выполняются в каждой точке этой области, и обратно, если условия (С.-R.) имеют место повсюду в области G и функции u и v дифференцируемы в G , то функция $w=u+iv$ будет аналитической в G .

6.Сопряженные гармонические функции.

В дальнейшем мы убедимся в том, что функция аналитическая в области G , имеет производные всех порядков. В частности, для такой функции u и v имеют непрерывные частные производные второго порядка в области G . Посмотрим, как нужно выбирать u и v для того, чтобы функция $u+iv$ была аналитической в рассматриваемой области.

Дифференцируя первое из условий (С.-Р.) относительно x , а второе относительно y , получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Складывая эти равенства, имеем $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (9).

Формула (9) – это уравнение Лапласа и всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, называется **гармонической**. Итак, u есть гармоническая функция в области G . Покажем также, что и v является гармонической функцией в области G . Для этого нужно продифференцировать первое из равенств (С.-Р.) относительно y , второе же относительно

x и вычесть результаты $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

Однако, если взять за u и v две произвольные функции, гармонические в G , то $u+iv$ не будет, вообще говоря, аналитической в G . Для того, чтобы $u+iv$ была функцией, аналитической в области G , нужно сделать так: взяв за одну из функций, например, u произвольную гармоническую функцию, определить затем v из уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{С.-Р.})$$

Заметим, что выражение $\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ есть полный дифференциал, так как $\Delta v = 0$; следовательно, v определяется квадратурами с точностью до произвольного

постоянного слагаемого: $v = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$

Так определяемая гармоническая функция v называется сопряженной с гармонической функцией u .

7.Свойства производных.

Приведем основные свойства производных Ф.К.П., аналогичные соответствующим свойствам производных для Ф.Д.П: $[u(z) \pm v(z)]' = u'(z) \pm v'(z)$

$$[u(z)v(z)]' = u(z)v'(z) + u'(z)v(z)$$

$$\left[\frac{u(z)}{v(z)} \right]' = \frac{u'(z)v(z) - u(z)v'(z)}{v^2(z)} \quad (v(z) \neq 0)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dv}{dv} \frac{dv}{dz} \quad (*)$$

Последнюю формулу надо понимать так: если w есть функция $w = \varphi(v)$ комплексного переменного v , имеющая производную $\frac{dw}{dv} = \varphi'(v)$, а $v = \psi(z)$ – Ф.К.П. z , имеющая

производную $\frac{dv}{dz} = \psi'(z)$, то производная сложной функции $w = F(z) = \varphi[\psi(z)]$ вычисляется по формуле (*).