

ЛЕКЦИЯ N 30.

Линейные дифференциальные уравнения I-го порядка. Уравнение Бернулли. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.	1
2. Уравнение Бернулли.	2
3. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.	3

1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ (1), то есть линейное относительно искомой функции и ее производной, называется линейным. Здесь $p(x)$ и $q(x)$ – известные функции независимой переменной.

Если в частном случае $q(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется линейным уравнением без свободного члена или линейным однородным уравнением.

Существуют два метода решения таких уравнений.

1. Метод вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим однородное уравнение: $y' + p(x)y = 0$; $dy + p(x)ydx = 0$ (2).

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx; \ln |y| = -\int p(x)dx + \ln C_1,$$

$$y = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx} = C e^{-\int p(x)dx}$$

Это общее решение однородного уравнения (2). Общее решение уравнения (1) будем искать в виде $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ (3). (Мы заменили произвольную постоянную на некоторую дифференцируемую функцию от x).

Для того, чтобы (3) было решением нужно, чтобы она удовлетворяла этому уравнению.

$$\text{Находим } y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)).$$

Подставляя выражение для y и y' в уравнение (1), получим соотношение для определения функции $C(x)$: $C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, отсюда получим

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_0 \quad (4).$$

Подставляя (4) в (3), получаем общее решение линейного уравнения

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_0 \right) e^{-\int p(x)dx}$$

Пример. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2$; $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$ - однородное уравнение.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln |y| = \ln |x| + \ln C_1; y = \pm C_1 x \rightarrow y = Cx$$

$y_{н.у.} = C(x)x$; (н.у. - неоднородное уравнение).

$y' = C'(x)x + C(x)$; подставляя y и y' в исходное уравнение, получим:

$$C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x}{x} + x^2; C'(x) = x;$$

$$\frac{d[C(x)]}{dx} = x \rightarrow d[C(x)] = \int x dx; C(x) = \frac{x^2}{2} + C; y_{н.у.} = (\frac{x^2}{2} + C_0)x.$$

2.Метод Бернулли.

Уравнение (1) можно свести к уравнению с разделяющимися переменными с помощью искусственного приема. Пусть $y=uv$.

Одной из этих функций можно распорядиться совершенно произвольно. При этом вторая должна быть определена из условия, чтобы их произведение удовлетворяло (1).

Находим, $y' = u'v + v'u$.

Подставляем в (1): $u'v + v'u + puv = q$ или $u'v + u(v' + pv) = q$

Выберем в качестве v какое-нибудь частное решение уравнения: $v' + pv = 0$ (6).

Тогда, для отыскания u получим уравнение $u'v = q$ (7).

Итак, уравнение (1) заменено двумя уравнениями (6) и (7), каждое из которых -уравнение с разделяющимися переменными.

Из (6) имеем $\frac{dv}{v} + p dx = 0; \ln |v| = \int -p dx; v = e^{-\int p dx}$.

Из (7): $u' e^{-\int p dx} = q; du = q e^{\int p dx} dx; u = \int q e^{\int p dx} dx + C$.

Итак, $y = e^{-\int p dx} (\int q e^{\int p dx} dx + C)$.

Это общее решение линейного уравнения.

Пример. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$; пусть $y=uv$; $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x}$; $u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = \frac{\sin x}{x}$;

$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; v = \frac{1}{x} \Rightarrow u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}; u' = \sin x; u = \int \sin x dx = -\cos x + C; y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$

2.Уравнение Бернулли.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида: $y' + py = qy^m$. Это уравнение отличается от линейного тем, что в правую часть входит множителем некоторая степень $m(m \neq 1, m \neq 0)$ искомой функции y .

Простые преобразования сводят уравнение Бернулли к линейному уравнению.

Разделим обе части на y^m : $y' y^{-m} + p y^{1-m} = q$

Делаем подстановку $y^{1-m} = u$, тогда $u' = (1-m)y^{-m}y'$, а уравнение принимает вид:

$\frac{u'}{1-m} + pu = q$. Проинтегрировав это линейное уравнение, найдем решение по формуле

$$y = u^{\frac{1}{1-m}}.$$

Пример. $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$; Будем решать это уравнение как линейное, применяя метод

вариации произвольной постоянной. Найдем решение однородного

уравнения: $y' - \frac{y}{x-1} = 0$. Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}; y = C(x-1);$

$y_{н.у.} = C(x)(x-1); y'_{н.у.} = C'(x)(x-1) + C(x)$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$C'(x)(x-1) + C(x) - \frac{C(x)(x-1)}{x-1} = \frac{C^2(x) \cdot (x-1)^2}{x-1};$$

$C'(x)=C^2(x); \frac{dC[x]}{dx}=C^2(x); \frac{dC[x]}{C^2(x)}=dx; -\frac{1}{C(x)}=x+C; C(x)=\frac{-1}{x+C}; y=\frac{-(x-1)}{x+C}=\frac{1-x}{x+C}$ -это общее решение уравнения Бернулли.

3.Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Рассмотрим уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (*)$$

Если дифференциальное выражение в левой части является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, то уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Необходимым условием этого будет: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (далее докажем это!)

Будем искать функцию $u(x, y)$, полный дифференциал которой равен $Pdx + Qdy$ или, что все равно, удовлетворяющую уравнениям $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y); \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \quad (1).$

Интегрируя первое уравнение, имеем $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \varphi(y) \quad (2),$ где x_0 –

произвольное значение x , а $\varphi(y)$ – произвольная функция от y .

Нужно подобрать такую функцию $\varphi(y)$, чтобы, получающаяся при этом из равенства (2), функция $u(x, y)$ удовлетворяла еще и второму из уравнений (1): $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Покажем, что при

выполнении условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ такая функция $u(x, y)$ действительно существует и найдем

ее. Продифференцируем равенство (2) по y . По правилу Лейбница получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y), \text{ или, так как } \frac{\partial u}{\partial y} = Q; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ то}$$

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y). \text{ Откуда, получим } \varphi'(y) = Q(x_0, y).$$

Видим, что $\varphi'(y)$ и в самом деле зависит только от y . Интегрируя, находим

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy, \text{ где } y_0 \text{ – произвольное значение } y.$$

Подставляя полученное для $\varphi(y)$ выражение в равенство (2), и приравнявая $u(x, y)$ произвольной постоянной, приходим к формуле $\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C$.

Если $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, то $Q - \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx$ зависит от x , а это противоречит независимости $\varphi'(y)$ от x .

Значит, в этом случае не существует функции $u(x, y)$, удовлетворяющей обоим уравнениям (1), и $Pdx + Qdy$ не есть полный дифференциал.

Пример. $(2x+y)dx + (x-4y)dy = 0$, так как $\frac{\partial}{\partial y}(2x+y) = \frac{\partial}{\partial x}(x-4y) = 1$, то левая часть – полный

дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Имеем: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, откуда,

$$u(x, y) = \int_0^x (2x + y) dx + \varphi(y) = x^2 + yx + \varphi(y)$$

Далее $\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x - 4y; \varphi'(y) = -4y$, то есть $\varphi(y) = -2y^2$

Следовательно, $u(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$, т.е окончательный ответ: $x^2 + xy - 2y^2 = C$.

Интегрирующий множитель.

Перейдем к интегрированию уравнения в случае, когда $P'_y \neq Q'_x$, то есть когда оно не есть уравнение в полных дифференциалах.

Оказывается, что всегда существует такая функция $M = M(x, y)$, что после умножения обеих частей уравнения на эту функцию, оно обращается в уравнение в полных дифференциалах. Такую функцию называют интегрирующим множителем.

Умножая обе части уравнения (*) на некоторую функцию $M(x, y)$ – получим

$$M(x, y) \cdot P(x, y) dx + M(x, y) \cdot Q(x, y) dy = 0.$$

Для того, чтобы это было уравнение в полных дифференциалах необходимо, $\frac{\partial(MP)}{\partial y} = \frac{\partial(MQ)}{\partial x}$, то есть $M \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial M}{\partial y} = M \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial M}{\partial x}$ или $Q \frac{\partial M}{\partial x} - P \frac{\partial M}{\partial y} = M \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$, и

$$\text{деля на } M: Q \frac{\partial \ln M}{\partial x} - P \frac{\partial \ln M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (**)$$

Очевидно, что любую функцию $M(x, y)$, удовлетворяющую равенству (**), можно принять в качестве интегрирующего множителя. Это дифференциальное уравнение интегрирующих множителей. Заметим, что решить это уравнение гораздо сложнее, чем исходное. Но для некоторых уравнений легко найти такой множитель. Особенно, если M зависит только от одной из переменных. Допустим, что M – функция, удовлетворяющая

$$(**) \text{ и не зависящая от } y. \text{ При этом } \frac{\partial \ln M}{\partial y} = 0 \text{ и для } M \text{ имеем } \frac{d \ln M}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}, \text{ из}$$

которого $\ln M$, а значит и M находятся одной квадратурой. Ясно, что правая часть этого уравнения не должна зависеть от y .

Аналогично дело обстоит, если существует M , не зависящее от x . Необходимо, чтобы

$$\text{выражение } \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \text{ не зависело от } x, \text{ тогда } \frac{d \ln M}{dy} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

Пример. $(2 + 2x - y^2)dx - 2ydy = 0$

Здесь $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (-2y - 0) = -2y \neq 0$ и это не уравнение в полных дифференциалах. Но

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2y}{-2y} = 1 \text{ не зависит от } y, \text{ поэтому интегрирующий множитель можно найти из}$$

$$\text{уравнения } \frac{d \ln M}{dx} = 1; \ln M = x; M = e^x.$$

Домножая на этот множитель исходное уравнение, получаем: $e^x(2 + 2x - y^2)dx - e^x 2ydy = 0$ - это уже уравнение в полных дифференциалах: $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y \cdot e^x; \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \cdot e^x$.

Применяя изложенный метод интегрирования для уравнений в полных дифференциалах, получим окончательный ответ: $2xe^x - y^2 e^x = C$.