

## ЛЕКЦИЯ N29.

### Дифференциальные уравнения. Общие понятия. Дифференциальные уравнения I-го порядка. Уравнения с разделяющимися переменными.

|                                                     |   |
|-----------------------------------------------------|---|
| 1. Дифференциальные уравнения. Общие понятия. ....  | 1 |
| 2. Дифференциальные уравнения первого порядка. .... | 2 |
| 3. Уравнение с разделяющимися переменными. ....     | 4 |
| 4. Однородные уравнения. ....                       | 5 |
| 5. Уравнения, приводимые к однородным. ....         | 6 |

#### 1. Дифференциальные уравнения. Общие понятия.

При решении многих задач математики, физики и техники часто не удастся сразу установить функциональную зависимость между искомыми и данными переменными величинами, но зато удастся составить уравнения, связывающие независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такое уравнение называется дифференциальным. Дифференциальное уравнение может не содержать в явном виде независимую переменную и искомую функцию, но обязательно должно содержать одну или несколько производных искомой функции.

**Задача.** Тело охладилось за 10 минут от  $100^\circ$  до  $60^\circ$ . Температура окружающего воздуха поддерживается постоянной и равной  $10^\circ$ . Определить, через сколько минут температура тела станет равной  $20^\circ$ .

**Решение.** Известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой, до которой нагрето тело, и температурой окружающей среды.

Обозначим температуру тела в некоторый момент времени  $t$  через  $T(t)$ , тогда скорость изменения температуры по времени равна производной  $\frac{dT}{dt}$ .

Так как скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой нагрева тела и температурой окружающей среды, то получаем  $\frac{dT}{dt} = k(T - 10)$  (1).

Здесь  $k$  – множитель – коэффициент пропорциональности. Уравнение (1) – это дифференциальное уравнение с неизвестной функцией  $T(t)$ .

Как решается это уравнение, увидим дальше!

**Определение.** Дифференциальное уравнение – это уравнение, связывающее независимые переменные, искомую функцию и ее производные возможно до  $n$ -го порядка включительно. Если искомая функция зависит от одного переменного, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2).$$

Здесь  $F$  – заданная функция от  $(n+2)$  переменных, удовлетворяющая условиям определенности и дифференцируемости, а  $y = y(x)$  – функция от  $x$  – решение дифференциального уравнения, которое надо найти.

**Определение.** Решением дифференциального уравнения порядка  $n$  называется функция  $y(x)$ , имеющая на некотором интервале  $(a, b)$  производные  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$  до порядка  $n$  включительно, и удовлетворяющая этому уравнению. Это значит, что выполняется тождество по  $x$ :  $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, x \in (a, b)$ .

График решения обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется интегральной кривой.

Порядком дифференциального уравнения называется высший из порядков входящих в это уравнение производных искомой функции:

$$\left. \begin{aligned} y' + 3xy - y^2 &= 0 \\ y'^2 + xy - 7 &= 0 \end{aligned} \right\} - \text{это уравнения первого порядка.}$$

$y^{IV} + y'' \ln x = 1$  – это уравнение четвертого порядка и так далее.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти те или иные решения данного дифференциального уравнения.

## 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Это дифференциальное уравнение связывает независимую переменную, искомую функцию и ее первую производную:  $F(x, y, y') = 0$  (3).

Мы будем предполагать, что функция  $F(x, y, z)$  задана в некоторой области трехмерного пространства  $\Omega$  и непрерывна на  $\Omega$  вместе со своими частными производными  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F}{\partial x}$ . В

частности  $\Omega$  может быть всем трехмерным пространством точек  $(x, y, z)$ .

Итак, решением или частным решением дифференциального уравнения будем называть любую действительную непрерывную дифференцируемую функцию  $y = y(x)$ , заданную на  $(a, b)$ , которая удовлетворяет этому уравнению:  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ ,  $x \in (a, b)$ ;  $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$ .

Два алгебраических уравнения  $F_1(x, y, z) = 0$ ;  $F_2(x, y, z) = 0$  (4) называются эквивалентными на области  $\Omega$  точек  $(x, y, z)$ , если из того, что точка  $(x, y, z) \in \Omega$  удовлетворяет одному из этих уравнений, следует, что она удовлетворяет и другому.

Соответственно, два дифференциальных уравнения

$$F_1(x, y, y') = 0; F_2(x, y, y') = 0 \quad (5)$$

называются эквивалентными на  $\Omega$ , если эквивалентными на  $\Omega$  (4).

При преобразовании дифференциального уравнения надо следить, чтобы получаемое после преобразования новое дифференциальное уравнение было эквивалентным на  $\Omega$  прежнему. Или хотя бы замечать, какие из решений могут исчезнуть или прибавиться после преобразований.

**Задача Коши:** требуется найти решение  $y = y(x)$  данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , где  $(x_0, y_0)$  – заданная точка плоскости  $(x, y)$ .

Задача Коши может иметь и не иметь решения. Если задача Коши имеет решение, то нужно знать, единственно ли оно.

**Теорема.** Для дифференциального уравнения первого порядка, записанного в разрешенной относительно  $y'$  форме,  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ;  $((x, y) \in G)$  задача Коши имеет решение, и при том единственное, для любой точки  $(x_0, y_0)$  области  $G$  плоскости  $(x, y)$ , если заданная на этой области функция  $f(x, y)$  непрерывна вместе со своей частной производной  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение  $y' = f(x)$  ( $a < x < b$ ) (6), где  $f(x)$  – непрерывная на  $(a, b)$  функция.

Любое решение этого дифференциального уравнения может быть записано так:  $y = \int f(x) dx + C = \Psi(x) + C$  (7).

Каждому значению параметра  $C$  соответствует отдельное (частное) решение дифференциального уравнения и при этом любое решение этого уравнения может быть получено из (7) при соответствующем  $C$ .

Поэтому, (7) называют общим решением (6).

**Определение.** Пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка  $F(x, y, y')=0$ , где  $F(x, y, z)$  и ее частные производные  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F}{\partial x}$  непрерывны на области  $\Omega$  точек  $(x, y, z)$

трехмерного пространства. Общим интегралом дифференциального уравнения называется равенство  $\Phi(x, y, C)=0$  (8), где  $\Phi(x, y, z)$  – непрерывно дифференцируема на некоторой области точек  $(x, y, z)$  и обладает следующим свойством: если

продифференцировать равенство (8) по  $x$ , считая, что  $y=y(x)$ :  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0$  (9) и

исключить  $C$  из уравнений (8), (9), то получим дифференциальное уравнение, эквивалентное (3).

Выясним, каков геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (3).

Разрешая это уравнение, если можно, относительно  $y'$ , получим  $y'=f(x, y)$  (10)

Будем рассматривать  $x$  и  $y$  как декартовы координаты точки на плоскости. Пусть  $y=\varphi(x)$  – решение уравнения (10).

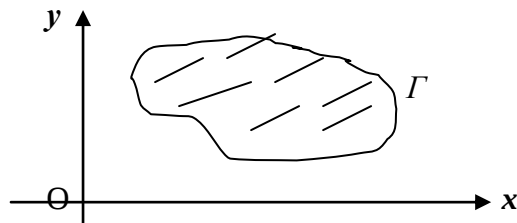
Это значит, что если в уравнение (10) подставить вместо  $y$  функцию  $\varphi(x)$ , а вместо  $y'$  – производную  $\varphi'(x)$ , то получится тождество  $\varphi'(x)=f(x, \varphi(x))$ .

Рассмотрим на графике функции  $y=\varphi(x)$ , то есть на интегральной кривой, точку  $M(x, y)$  и проведем в этой точке касательную. Согласно геометрическому свойству производной  $\varphi'(x)=\operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона касательной к оси  $Ox$ . Получим,  $\operatorname{tg} \alpha=f(x, \varphi(x))=f(x, y)$ .

**Итак**, угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой ее точке равен значению в этой точке правой части дифференциального уравнения (10).

Значит, дифференциальное уравнение (10) определяет в каждой точке  $(x, y)$  интегральной кривой направление касательной к этой кривой.

Часть плоскости (или вся плоскость), каждой точке которой сопоставили отрезок так, что тангенс угла наклона его к оси  $Ox$  равен значению в данной точке правой части дифференциального уравнения (10), называется полем направления  $\Gamma$  данного дифференциального уравнения.



Множество всех точек плоскости, в которых отрезки поля имеют одно и то же направление, называется *изоклиной* дифференциального уравнения.

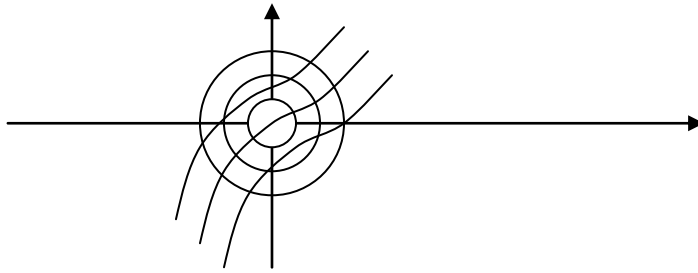
Уравнение изоклины найти очень легко. Действительно, в каждой точке изоклины тангенс угла наклона отрезков поля имеет одно и то же значение  $\operatorname{tg} \alpha=k$ .

Но  $\operatorname{tg} \alpha=y'=f(x, y)$ , поэтому координаты каждой точки изоклины удовлетворяют уравнению  $f(x, y)=k$ .

*Пример.* Построим поле направлений дифференциального уравнения  $y'=x^2+y^2$ .

Уравнение изоклины  $x^2+y^2=k$ , то есть это концентрические окружности с центром в начале координат радиуса  $\sqrt{k}$ .

Для того, чтобы построить интегральную кривую, возьмем на плоскости точку  $(x_0, y_0)$ . Проведем через нее кривую так, чтобы она в каждой точке имела направление поля.



Итак, выводы:

- 1) дифференциальному уравнению (3) соответствует бесконечное множество интегральных кривых и, бесконечное множество решений;
- 2) для выделения из этого множества конкретной интегральной кривой надо задать точку  $(x_0, y_0)$ , через которую должна проходить кривая.

Точки плоскости, в которых не выполняются условия теоремы Коши, называются особыми точками дифференциального уравнения. В этих точках терпит разрыв либо функция  $f(x, y)$ , либо ее частная производная  $f'_y(x, y)$ . Через каждую из таких точек может проходить либо несколько интегральных кривых, либо не проходит ни одной.

Дадим определение общего и частного решений дифференциального уравнения, правая часть которого удовлетворяет в некоторой области  $G$  теореме Коши.

**Определение.** Функция  $y = \varphi(x, C)$ , называется общим решением уравнения (10) в области  $G$ , если она удовлетворяет двум условиям:

- 1) при любых значениях произвольной постоянной  $C$ , принадлежащих некоторому множеству, функция  $y = \varphi(x, C)$  является решением уравнения (10);
- 2) какова бы ни была точка  $(x_0, y_0)$ , лежащая внутри  $G$ , существует единственное значение постоянной  $C = C_0$  такое, что решение  $y = \varphi(x, C_0)$  удовлетворяет начальным условиям  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

Всякое решение  $y = \varphi(x, C_0)$  уравнения (10), получающееся из общего решения  $y = \varphi(x, C)$  при конкретном значении  $C = C_0$ , называется частным решением.

*Замечание.* Решение, полученное в виде, не разрешенном относительно  $y$ , называется общим интегралом.

### 3. Уравнение с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно представить в виде:  $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$  (11).

Правая часть функ этого уравнения – произведение двух множителей, каждый из которых является функцией только одного аргумента.

Перепишем (11) в виде:  $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y); \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$  (12)

Это уравнение с разделенными переменными.

Допустим, что мы нашли решение  $y(x)$  уравнения (12). Если эту функцию подставим в (12), то оно обращается в тождество. Интегрируя его почленно, получим:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} + C_1 = \int f_1(x) dx + C_2 \text{ или } C = C_2 - C_1$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C \text{ - это общий интеграл уравнения.}$$

При делении обеих частей (11) на  $f_2(y)$  мы можем потерять те решения, при которых  $f_2(y)=0$ . Если  $f_2(y)=0$  при  $y=y_0$ , то  $y=y_0$  – решение уравнения (11).

*Пример 1.* Вернемся к составленному выше уравнению:  $\frac{dT}{dt} = k(T-10)$ ; тогда  $\frac{dT}{T-10} = kdt$ ;

$$\ln|T-10| = kt + \ln C_1 \quad (C_1 > 0)$$

$$|T-10| = C_1 e^{kt}; \quad T-10 = \pm C_1 e^{kt} = C e^{kt}$$

$T = C e^{kt} + 10$  – это общее решение.

Для выделения частного решения используем начальное условие  $T|_{t=0} = 100$ .

Итак,  $C e^{k \cdot 0} + 10 = 100 \rightarrow C = 90$ .

$T = 90 e^{kt} + 10$  – частное решение. Чтобы найти  $k$  используем второе условие: при  $t=10$  температура тела  $T=60^\circ$ . Тогда,  $60 = 90 e^{10k} + 10 \rightarrow e^{10k} = 5/9$ .

Итак,  $T = 90(e^{10k})^{t/10} + 10 = 90 \cdot (5/9)^{t/10} + 10$

Чтобы выяснить, через сколько времени тело охладится до  $20^\circ$ , получим  $20 = 90(5/9)^{t/10} + 10$

$$(5/9)^{t/10} = 1/9 \rightarrow \frac{t}{10} \lg \frac{5}{9} = \lg \frac{1}{9}; \quad t = \frac{10 \lg \frac{1}{9}}{\lg \frac{5}{9}} \approx 37,4 \text{ мин.}$$

*Пример 2.* Найти частное решение дифференциального уравнения  $(1+x^2)dy + ydx = 0$  при начальных условиях  $y(1)=1$ .

Решение. Преобразуем уравнение к виду  $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$ . Интегрируя, получим

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{или} \quad \ln(y) = -\arctg x + C. \quad \text{Это и есть общий интеграл.}$$

Подставим начальные значения и найдем  $C$ :  $\ln 1 = -\arctg 1 + C$ , то есть  $C = \frac{\pi}{4}$

$$\ln y = -\arctg x + \frac{\pi}{4}$$

Отсюда  $y = e^{\frac{\pi}{4} - \arctg x}$  – частное решение.

#### 4. Однородные уравнения.

**Определение.** Уравнение  $y' = f(x, y)$  называется однородным, если функция  $f(x, y)$  может быть представлена как функция отношения своих аргументов  $f(x, y) = \varphi(\frac{y}{x})$ .

В общем случае переменные в однородном уравнении не разделяются. Однако с помощью простой замены неизвестной функции  $y$  новой функцией  $u$  по формуле:

$\frac{y}{x} = u$  или  $y = xu$  однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Имеем,  $y' = u + xu'$  и уравнение  $y' = \varphi(\frac{y}{x})$  принимает вид  $u + xu' = \varphi(u)$ , то есть

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

Отсюда,  $\frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$ , то есть переменные разделились, и после интегрирования получим:  $\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$  ; или  $\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \ln x$ .

Эта формула и дает общий интеграл уравнения. Найдя отсюда выражение для  $u$  как функции от  $x$  и возвращаясь к переменной  $y=xu$ , получим искомое решение однородного уравнения.

Чаще всего не удастся найти явное выражение для  $u$ . Тогда, после интегрирования левой части, вместо  $u$  подставляем  $\frac{y}{x}$  и приходим к интегралу данного уравнения.

Очевидно, что  $\varphi(u)-u \neq 0$ , если  $\varphi(u) \equiv 0$ , то  $\varphi(\frac{y}{x}) \equiv \frac{y}{x}$  и не нужно делать никаких преобразований, ибо само заданное уравнение – с разделяющимися переменными.

*Пример.*  $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ ; подстановка  $y=xu$ :  $u+xu' = \frac{x^2u - x^2u^2}{x^2 - 2x^2u}$ ;  $u+xu' = \frac{u-u^2}{1-2u}$ ;  $xu' = \frac{u-u^2}{1-2u} - u$ ;

$xu' = \frac{u-u^2-u+2u^2}{1-2u}$ ;  $\frac{u^2}{1-2u} = x \frac{du}{dx}$ ;  $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-2u}{u^2} du$ ;  $\ln|x| = \int \frac{du}{u^2} - 2 \int \frac{udu}{u^2}$ ;  $\ln|x| =$

$-\frac{1}{u} - 2 \ln u + \ln C$ ;  $\frac{1}{u} + 2 \ln u = \ln C - \ln(x)$ ;  $\frac{1}{u} + 2 \ln u = \ln \frac{C}{x} \Rightarrow \ln \frac{C}{u^2 x} = \frac{1}{u}$ ;  $\frac{C}{u^2 x} = e^{\frac{1}{u}}$ ;  $\frac{C}{x} = u^2 e^{\frac{1}{u}}$

Возвращаясь к переменной  $y$ , получим  $\frac{y^2}{x} e^{\frac{x}{y}} = C$  - это общий интеграл уравнения.

*Замечание.* Рассмотрим уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  (\*). Оно будет однородным, если функции  $P(x, y); Q(x, y)$  являются однородными одного и того же  $m$ -го измерения, то есть  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ .

## 5. Уравнения, приводимые к однородным.

Уравнение следующего вида:  $y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2})$  называется приводимым к

однородному. При  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$  производится подстановка  $x = u + \alpha$ ;  $y = v + \beta$ , где  $(\alpha, \beta)$  – точка пересечения прямых  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Если же  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , то подстановка  $a_1x + b_1y = t$  позволяет разделить переменные.