

ЛЕКЦИЯ N 17.

Приближенное вычисление определенных интегралов. Несобственные интегралы.

Приближенное вычисление определенных интегралов.....	1
1. Формула трапеций.....	1
2. Формула парабол.....	1
Несобственные интегралы.....	3
1. Интеграл с бесконечными пределами.....	4
2. Интеграл от разрывной функции.....	8

Приближенное вычисление определенных интегралов.

При решении физических задач приходится иметь дело с определенными интегралами от непрерывных функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Это приводит к необходимости получения приближенных формул для вычисления определенных интегралов. Приведем две из них, а именно, формулу трапеций и формулу парабол.

1. Формула трапеций.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке

$[a, b]$. Для упрощения рассуждений будем считать, что $f(x) \geq 0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$ и с помощью прямых $x=x_k$ ($k=0, 1, \dots, n$) построим n прямолинейных трапеций. Сумма площадей этих трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции, то есть

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1) + \dots + \\ + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1}) = \frac{b-a}{2n} [f(a)+f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)],$$

где $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ – соответственно основания трапеций, а $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ – их высоты. Таким

образом, получена приближенная формула $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(a)+f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)]$,

которая называется формулой трапеций. Эта формула тем точнее, чем больше n .

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную второго порядка

$f'(x)$, то абсолютная величина погрешности не превосходит числа $M \frac{(b-a)^3}{12n^2}$, где $M=$

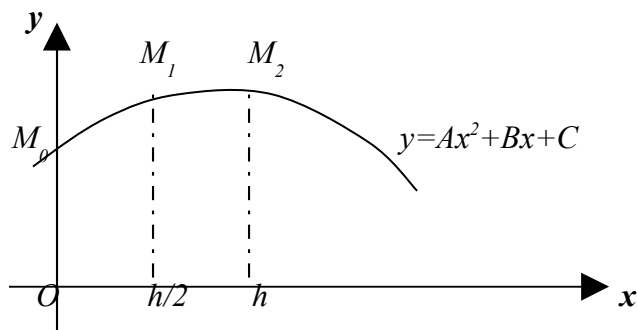
$$\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

2. Формула парабол.

Вычислим сначала площадь Q криволинейной трапеции, ограниченной дугой M_0M_2 параболы $y = Ax^2 + Bx + C$, проходящей через точки $M_0(0, y_0)$, $M_1(h/2, y_1)$, $M_2(h, y_2)$

Площадь Q будет равна

$$Q = \int_0^h (Ax^2 + Bx + C) dx = A \frac{x^3}{3} \Big|_0^h + B \frac{x^2}{2} \Big|_0^h + Cx \Big|_0^h = A \frac{h^3}{3} + B \frac{h^2}{2} + Ch = \frac{h}{6} (2Ah^2 + 3Bh + 6C)$$



Выразим площадь Q через ординаты точек M_0 , M_1 , M_2 . Подставляя координаты этих точек в уравнение параболы, получим $y_0 = C$, $y_1 = A \frac{h^2}{4} + B \frac{h}{2} + C$, $y_2 = Ah^2 + Bh + C$.

Отсюда находим, что $2Ah^2 + 3Bh + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2$ и поэтому $Q = \frac{h}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2)$ (1).

Рассмотрим теперь определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ – произвольная функция, непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2n$ (четное число) равных отрезков точками

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$ и представим интеграл в виде суммы

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \quad (2).$$

Проведем через точки x_k прямые, параллельные оси Oy , и обозначим через A , M_1 , $M_2, \dots$, M_{2n-2} , M_{2n-1} , B точки пересечения этих прямых с кривой $y = f(x)$, а их ординаты обозначим через y_0 , y_1 , $y_2, \dots$, y_{2n-2} , y_{2n-1} , y_{2n} . Через каждые три точки M_{2k-2} , M_{2k-1} , M_{2k} ($k = 1, 2, \dots, n$) проведем параболу с вертикальной осью симметрии. В результате получим n криволинейных трапеций, ограниченных сверху параболой. Так как площадь частичной криволинейной трапеции, отвечающей отрезку $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ приближенно равна площади соответствующей «параболической» трапеции, то, учитывая, что длина h отрезка

$[x_{2k-2}, x_{2k}]$ равна $\frac{b-a}{2n}$, по формуле (1) имеем $\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$, где

$y_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Подставляя в правую часть равенства (2) вместо интегралов их приближенные значения, получаем приближенную формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})].$$

Эта формула называется формулой парабол или формулой Симпсона.

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную четвертого порядка $f^{(4)}(x)$, то абсолютная величина погрешности формулы Симпсона не

больше чем $M \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$, где $M = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$.

Погрешность формулы Симпсона с ростом n уменьшается быстрее, чем погрешность формулы трапеций. Поэтому формула Симпсона позволяет получить большую точность, чем формула трапеций.

Пример. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ по формуле Симпсона при $2n=4$.

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на четыре равных части точками $x_0=0, x_1=0,25, x_2=0,50, x_3=0,75, x_4=1$ и вычислим приближенно значение функции $y=\frac{1}{x+1}$ в этих точках: $y_0=1,0000; y_1=0,8000; y_2=0,6662; y_3=0,5714; y_4=0,5000$.

По формуле Симпсона находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_4 + 2y_2 + (4y_1 + y_3)] = \frac{1}{12} [1,0000 + 0,5000 + 2 \cdot 0,6662 + 2(0,8000 + 0,5714)] \approx 0,69325$$

Оценим погрешность полученного результата. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x+1}$ имеет

производную четвертого порядка $f^{(4)}(x)=\frac{24}{(x+1)^5}$, для которой получаем $M=$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{24}{(1+x)^5} \right| = 24.$$

Погрешность результата не превосходит величины $\frac{24}{2880 \cdot 2^4} < 0,0005$. Сравнивая

приближенное значение интеграла с точным, приходим к выводу, что абсолютная ошибка результата, полученного по формуле Симпсона, меньше 0,0001, что соответствует полученной выше оценке погрешности.

Эти примеры показывают, что формула Симпсона дает более точные приближенные значения интегралов, чем формула трапеций.

Несобственные интегралы.

До сих пор рассматривали определенные интегралы $\int_a^b f(x)dx$, где отрезок $[a, b]$ был конечным, а функция $f(x)$ – непрерывной на отрезке $[a, b]$. Интегралы, которые мы рассматриваем как предел интегральной суммы $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$ назовем собственными.

В качестве обобщения понятия определенного интеграла рассмотрим определенный интеграл с бесконечным промежутком интегрирования от непрерывной функции и определенный интеграл с конечными пределами интегрирования от функции, имеющей бесконечный разрыв на отрезке интегрирования. Такие интегралы называют несобственными.

Заметим, что для несобственного интеграла первого вида отсутствует понятие интегральной суммы, так как нельзя разбить бесконечный промежуток интегрирования на конечное число элементарных промежутков, имеющих конечную длину Δx_k .

Для несобственного же интеграла второго рода интегральную сумму построить можно, но она будет принимать большие числовые значения в силу неограниченности подынтегральной функции.

1. Интеграл с бесконечными пределами.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x \leq +\infty$, где a – произвольно заданное число.

Рассмотрим определенный интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^X f(x)dx$, где $X > a$.

Этот интеграл является функцией переменного предела X и при $X \rightarrow \infty$ может стремиться к определенному пределу.

$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \arctg X = \frac{\pi}{2}$. Этот предел и будет значением этого несобственного интеграла.

Определение. Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $f(x)$, непрерывной при $a \leq x \leq +\infty$, называется предел определенного интеграла $\int_a^X f(x)dx$ с переменным верхним

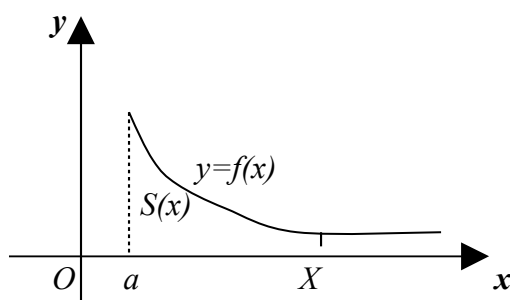
пределом X , когда $X \rightarrow +\infty$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x)dx$

Если предел интеграла $\int_a^X f(x)dx$ при $X \rightarrow +\infty$ есть определенное число c , то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называют сходящимся, а число c – его значением:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = c.$$

Если же $\int_a^X f(x)dx$ не имеет предела при $X \rightarrow +\infty$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся и числового значения не имеет.

В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ можно геометрически истолковать как площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.



Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то площадь криволинейной трапеции выражается определенным числом. Если же он расходится, то площадь будет равна бесконечности, так как величина $S(X)$ будет монотонно возрастать при возрастании X . Установим признаки сходимости и расходимости несобственного интеграла и правило его вычисления с помощью первообразной.

Теорема. Если первообразная $F(x)$ для непрерывной функции $f(x)$ имеет определенный конечный предел при $x \rightarrow +\infty$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (и вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница). Если же первообразная $F(x)$ не стремится к пределу при $x \rightarrow +\infty$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Доказательство.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x)dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} [F(X) - F(a)] = \lim_{X \rightarrow +\infty} F(X) - F(a) = [F(X)]_a^{+\infty}$$

Ясно, что, если $\lim_{X \rightarrow +\infty} F(X)$ существует, то интеграл сходится и равен разности $F(+\infty) - F(a)$.

Если же предел $\lim_{X \rightarrow +\infty} F(X)$ не существует, то интеграл расходится, что и требовалось доказать.

Пример 1. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

Решение. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} [-e^{-X} + e^0] = -0 + 1 = 1$. Интеграл сходится.

Пример 2. $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{+\infty} = ? - 0 -$. Интеграл расходится, так как $\sin x$ при $x \rightarrow +\infty$ не стремится к определенному пределу.

Пример 3. Показать, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$, где $a > 0$ сходится при $m > 1$ и расходится при $m \leq 1$

Решение. при $m > 1$ имеем $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{(-m+1)x^{m-1}} \Big|_a^{+\infty} = \frac{1}{(m-1)a^{m-1}}$, то есть интеграл сходится.

При $m < 1$ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{(-m+1)x^{m-1}} \Big|_a^{+\infty} = \frac{x^{1-m}}{1-m} \Big|_a^{+\infty} = \infty$

При $m = 1$ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = \infty$, то есть интеграл также расходится.

В приложениях иногда важнее знать сходится интеграл или расходится, числовое же значение его не всегда существенно. Поэтому, необходимы признаки сходимости и расходимости интегралов.

Первый признак. Пусть при $x \geq a$ справедливо неравенство $f(x) \leq \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные знакоположительные функции. Тогда, 1) если сходится $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, то

сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$;

2) если расходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Доказательство. 1. Пусть сходится $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$. Обозначим его значение через c , то есть $c =$

$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X \varphi(x) dx$. Интеграл $\int_a^X \varphi(x) dx$ монотонно возрастает при возрастании X [в силу

положительности $\varphi(x)$] и при всех значениях X выполняется соотношение $\int_a^X \varphi(x) dx < c$. Но

$f(x)$ — тоже положительная функция. Поэтому, интеграл $\int_a^X f(x) dx$ также монотонно

возрастает при возрастании X , оставаясь, однако меньшим интеграла $\int_a^X \varphi(x) dx$, поскольку

$f(x) \leq \varphi(x)$, и, следовательно, меньше числа c : $\int_a^X f(x) dx < \int_a^X \varphi(x) dx < c$.

Итак, $\int_a^X f(x) dx$ монотонно возрастает при $x \rightarrow +\infty$, будучи ограничен сверху числом c .

Тогда, по признаку существования предела $\int_a^X f(x) dx$ при $X \rightarrow +\infty$ имеет предел, причем он

не превосходит c . Это и означает, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$.

Часть 2 этой теоремы доказывается также.

Второй признак. Если при $x \geq a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и знакопостоянны и существует ненулевой предел их отношения при $x \rightarrow +\infty$, то несобственные интегралы

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Третий признак. Если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ от абсолютной величины подынтегральной функции $f(x)$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ от самой функции $f(x)$ (он называется в этом случае абсолютно сходящимся).

Четвертый признак. Если подынтегральная функция $f(x)$ несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ непрерывна и знакопостоянна и при $x \rightarrow +\infty$ является бесконечно малой,

имеющей порядок малости, больший единицы (если считать $\frac{1}{x}$ за бесконечно малую

первого порядка), то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Если же порядок малости $f(x)$ равен единице или меньше единицы, то интеграл расходится.

Пример 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x} + 1}$ сходится, так как $\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x} + 1} < \frac{1}{x^2}$ при $x \geq 1$, и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходящийся.

Пример 2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ расходится, так как $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \geq 2$, а $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - расходится.

На 2^{ой} признак.

Пример 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$ расходится, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x}} = 1$, а $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

На 3^{ий} признак.

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{1+3\sin x}{x^2} dx$ абсолютно сходится, так как сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|1+3\sin x|}{x^2} dx$.

А он сходится потому, что $|\frac{1+3\sin x}{x^2}| \leq \frac{4}{x^2}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x^2}$ сходящийся.

На 4^{ый} признак.

Пример. $\int_4^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4-9x^2} dx$ сходится, так как при $x \rightarrow +\infty$ функция $\frac{x^2+x+1}{x^4-9x^2}$ есть

знакопостоянная и непрерывная бесконечно малая второго порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$.

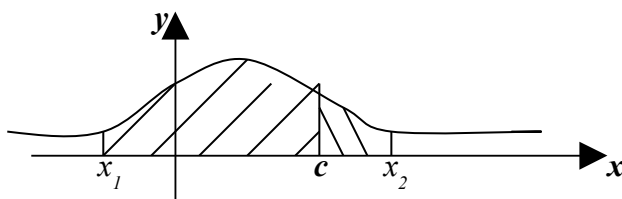
Пятый признак. Если при $x \geq a$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ненулевой предел при $x \rightarrow +\infty$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{3x-1}{5x+7} dx$ расходится, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{5x+7} = \frac{3}{5} \neq 0$.

Определение. Несобственным интегралом $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ от функции $f(x)$, непрерывной при $-\infty < x \leq b$, называется предел определенного интеграла $\int_X^b f(x) dx$ с переменным нижним пределом X , когда $X \rightarrow -\infty$ $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^b f(x) dx$.

Определение. Несобственным интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ от функции $f(x)$, непрерывной при всех действительных значениях x , называется сумма двух несобственных интегралов, где c – выбранное произвольное число.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$



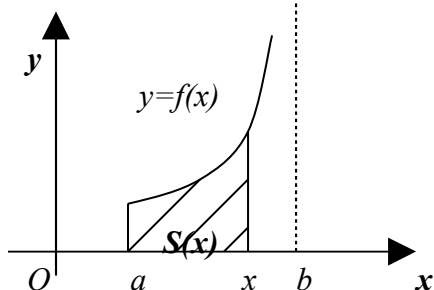
2. Интеграл от разрывной функции.

Определение. Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$, непрерывной при $a \leq x < b$ и имеющей бесконечный разрыв при $x=b$ [$f(b-0)=\infty$], называется предел определенного интеграла $\int_a^X f(x)dx$ с переменным верхним пределом X при $X \rightarrow b-0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{X \rightarrow b-0} \int_a^X f(x)dx$$

Если такой предел существует, то интеграл называется сходящимся, а если нет, то расходящимся.

Если $f(x) > 0$, то этот интеграл геометрически представляет собой площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции:

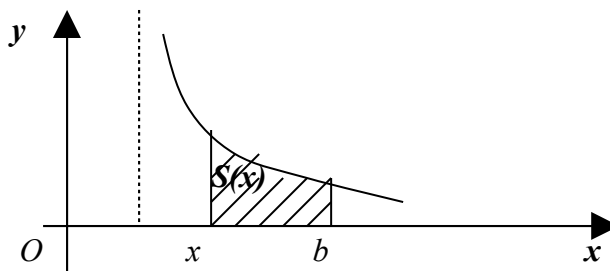


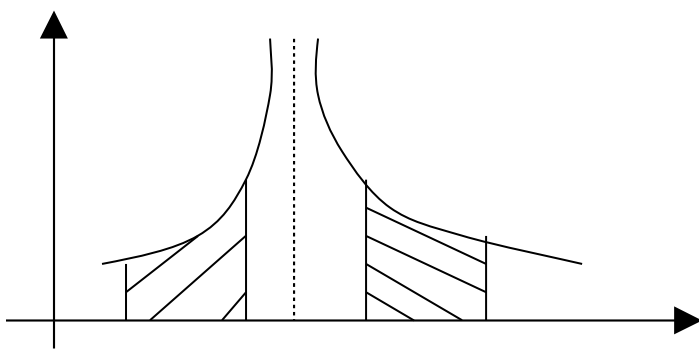
Теорема. Если первообразная $F(x)$ для $f(x)$ имеет левый предел в точке $x=b$, то несобственный интеграл сходится и вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница. А если этот предел не существует, то интеграл расходится.

Пример. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = -[\sqrt{1-2x}] \Big|_0^{1/2-0} = 1.$

Определение. Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$, непрерывной на $a < x \leq b$ и имеющей бесконечный разрыв при $x=a$ [$f(a+0)=\infty$], называется предел определенного интеграла $\int_X^b f(x)dx$ с переменным нижним пределом X при $X \rightarrow a+0$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{X \rightarrow a+0} \int_X^b f(x)dx$$





Определение.

Несобственным

интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от

функции $f(x)$, непрерывной при $a \leq x < c$ и при $c < x \leq b$, но имеющей бесконечный разрыв во внутренней точке $x=c$ отрезка

интегрирования, называется сумма двух несобственных интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{X_1 \rightarrow c-0} \int_a^{X_1} f(x)dx + \lim_{X_2 \rightarrow c+0} \int_{X_2}^b f(x)dx$$