

ЛЕКЦИЯ N14.

Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема о среднем.

1.Свойства определенного интеграла.....	1
2.Теорема о среднем значении.....	2
3.Производная интеграла по переменной верхней границе.....	3
4.Формула Ньютона-Лейбница.....	4

1.Свойства определенного интеграла.

1.Если подынтегральная функция равна единице, то $\int_a^b dx = b - a$ (1).

Доказательство. Составим интегральную сумму: $\sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a$. Переходя к пределу при стремлении $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, получим (1).

1. Если A – некоторое число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Доказательство. $\sum_{k=1}^n A f(\tilde{x}_k) \Delta x_k = A \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$. Переходя к пределу при $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ получим (2).

2. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – две интегрируемые функции, определенные на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f_1(\tilde{x}_k) + f_2(\tilde{x}_k)] \Delta x_k = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_1(\tilde{x}_k) \Delta x_k + \\ &+ \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_2(\tilde{x}_k) \Delta x_k = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx \end{aligned}$$

3. Если отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит на две части $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

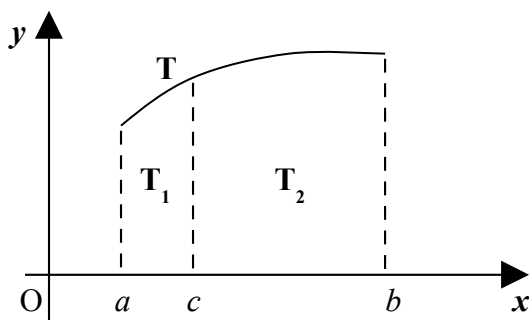
Действительно, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка

$[a, b]$ на части и от выбора $\tilde{x}_k$. Это позволяет при составлении каждой интегральной суммы включить точку c в число точек разбиения. Пусть $c = x_l$. Тогда интегральная сумма σ_n будет состоять из двух частей, одна из которых относится к отрезку $[a, c]$, другая – к

отрезку $[c, b]$: $\sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^l f(\tilde{x}_k) \Delta x_k + \sum_{k=l+1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$.

Переходя к пределу, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k &= \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^l f(\tilde{x}_k) \Delta x_k + \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=l+1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k, \text{ то есть} \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$



Геометрически означает, что $S_T = S_{T1} + S_{T2}$.

4. Если на отрезке $[a, b]$ $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Это очевидно, так как $f(\tilde{x}_k) \geq 0$ и

$\Delta x_k > 0$ для любых k , поэтому, $\sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k \geq 0$, то есть и предел интегральной суммы неотрицателен.

5. Если на отрезке $[a, b]$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \geq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx$, то есть неравенство можно почленно интегрировать.

Итак, разность $f(x) - \varphi(x) \geq 0$, поэтому, по свойству 5: $\int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx \geq 0$, то есть по

свойству 3: $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$, а значит, $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx$.

Следствие. Так как всегда $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, то из свойства 6 следует, что

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Отсюда $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

6. Если $f(x)$ интегрируема в $[a, b]$, где $a < b$, и если во всем этом промежутке имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ (3).

Воспользуемся очевидным неравенством $m \sum_{k=1}^n \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta x_k$, и перейдем к пределу. Тогда, получим (3).

2. Теорема о среднем значении.

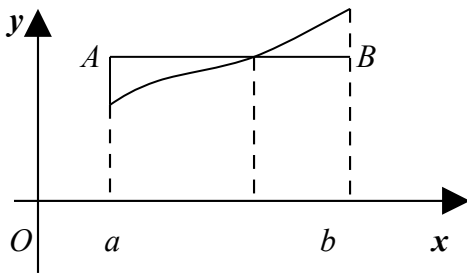
Теорема. Если $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, то существует такая точка $\tilde{x}_k$ этого сегмента, что $\int_a^b f(x) dx = f(\tilde{x})(b-a)$ (1).

Обозначим через m и M наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на отрезке. Тогда $m \leq f(x) \leq M$.

Доказательство. Если $a < b$, то по свойству 7 будем иметь $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.

Положим $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu$. Итак, число μ является промежуточным между наименьшим значением m функции $f(x)$ и ее наибольшим значением M . Так как непрерывная на отрезке функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между m и M , то найдется такое значение $\tilde{x}$ на $[a, b]$, для которого $f(\tilde{x}) = \mu$. Получим, $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\tilde{x})$, то есть (1).

Определенный интеграл от непрерывной функции равен значению подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке, умноженному на длину отрезка интегрирования.



Теорема имеет геометрическое истолкование. Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Тогда, интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим прямоугольник $aABb$, высота которого $y=f(\tilde{x})$. Тогда, $f(\tilde{x})(b-a)$ - это площадь прямоугольника. Итак, криволинейная трапеция равновелика прямоугольнику с тем же основанием и с высотой, равной ординате кривой в некоторой промежуточной точке $\tilde{x}$ основания. Значение функции в точке $\tilde{x}$ называется средним значением функции на отрезке.

3. Производная интеграла по переменной верхней границе.

Итак, $y=f(x)$ – функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

При заданной подынтегральной функции значение интеграла зависит от обеих границ интегрирования a и b . Если закрепить нижнюю границу a и изменять верхнюю границу b , то интеграл будет функцией своей верхней границы. Обозначим эту границу через x , а переменную интегрирования через t . Полученный интеграл – это некоторая функция от x :

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

Теорема. Производная интеграла по переменной верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Доказательство. Для нахождения производной функции (1) дадим x приращение Δx .

Тогда новое значение функции равно $I(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt$.

Тогда приращение функции при переходе от точки x к точке $x+\Delta x$ окажется равным

$$\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt.$$

Тогда по третьему свойству $\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$, то есть $\Delta I = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ (2).

Применим к интегралу (2) теорему о среднем $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\tilde{x})\Delta x$, где $\tilde{x}$ заключено между x и $x+\Delta x$. Итак, $\Delta I = f(\tilde{x})\Delta x$.

Пользуясь теперь определением производной, получим

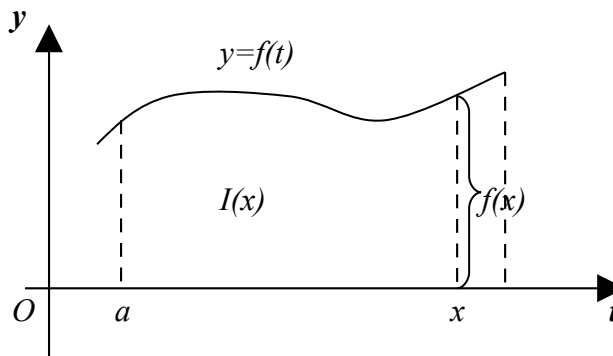
$$\frac{d \int_a^x f(t)dt}{dx} = \frac{dI(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{x})\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\tilde{x}).$$

Но, учитывая, что при $\Delta x \rightarrow 0$ $x+\Delta x \rightarrow x$, то есть и $\tilde{x} \rightarrow x$. Причем, подынтегральная функция непрерывна в точке x . Поэтому, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} f(\tilde{x}) = f(x)$.

Итак, $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема о существовании первообразной у непрерывной функции: всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразные, одной из которых является интеграл $\int_a^x f(t)dt$.

Замечание 1. Исходя из геометрического смысла интеграла, как площади, заметим, что $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ выражает переменную площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, x]$.



И можно сказать, что эта переменная площадь является первообразной для ординаты $y=f(x)$ линии, ограничивающей эту криволинейную трапецию.

Замечание 2. При $f(x)>0$ функция $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ возрастает, так как с возрастанием x площадь криволинейной трапеции возрастает.

4. Формула Ньютона-Лейбница.

Итак, мы установили, что функция $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной для непрерывной подынтегральной функции $f(x)$. Известно, что другая первообразная будет отличаться от

$I(x)$ только постоянной. Поэтому, если $F(x)$ – другая первообразная, то $I(x)=F(x)+C$, то есть $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ (1)

Найдем постоянную C при $x=a \Rightarrow I(a)=\int_a^a f(t)dt = 0$, подставим в (1) a : $0=F(a)+C \Rightarrow$

$C=-F(a)$, то есть $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ и в частности при $x=b$, имеем

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad (2).$$

Это и есть формула Ньютона-Лейбница (Г. Лейбниц – (1646-1716) – немецкий математик). Читают (2) так: определенный интеграл равен приращению первообразной от подынтегральной функции на отрезке $[a, b]$. Символически обозначают так:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

$$\text{Пример. } \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = 2$$

$$\text{Пример. } \int_1^2 (x^2 - 7)dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - 7x \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 14 + 7 = 6\frac{2}{3}$$

Для разрывных функций формула Ньютона-Лейбница не имеет места (только для непрерывных).