

ЛЕКЦИЯ N13.

Определенный интеграл. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.

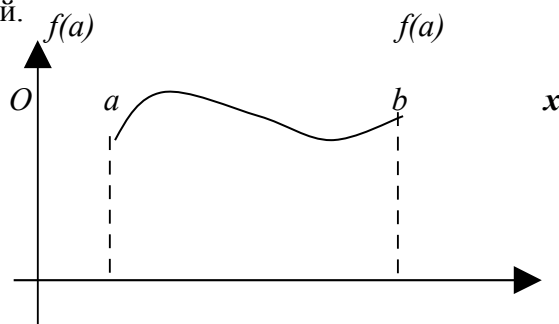
1. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции.....	1
2. Интегральная сумма. Определенный интеграл.....	3
3. Классы интегрируемых функций.....	4

y

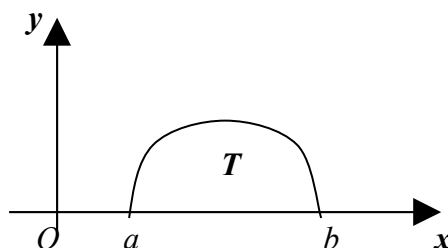
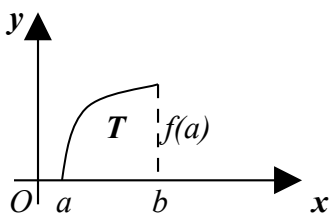
1. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции.

$A \quad y=f(x) \quad B$

Рассмотрим в декартовой системе координат фигуру T , называемую криволинейной трапецией.



Пусть фигура расположена в верхней полуплоскости ($f(x) \geq 0$) и ограничена отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, дугой AB графика $f(x)$ и двумя крайними ординатами $f(a)$ и $f(b)$.
Возможны случаи:



Поставлена задача о вычислении площади S криволинейной трапеции T .
Средствами элементарной геометрии вычислить площадь нельзя, так как в фигуру входит дуга AB .

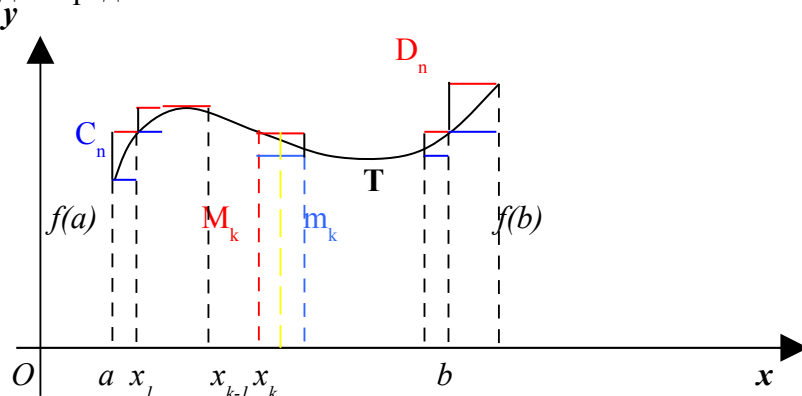
Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным способом на n малых отрезков (элементарных) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Длины элементарных отрезков обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, n$). Обозначим m_k – наименьшее и M_k – наибольшее значения функции $f(x)$ на k -ом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$.

Построим на каждом элементарном отрезке, как на основании, два элементарных прямоугольника: «входящий» с высотой m_k и «выходящий» с высотой M_k . Их площади равны $m_k \Delta x_k$ и $M_k \Delta x_k$. Ступенчатая фигура C_n , состоящая из входящих прямоугольников, имеет площадь $s_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ и объемлется криволинейной трапецией T , а ступенчатая

фигура D_n , состоящая из исходящих прямоугольников, имеет площадь $S_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ и

объемлет T . Поэтому при любом разбиении отрезка $[a, b]$ между площадями этих трех фигур должно иметь место следующее двойное неравенство: $s_n =$

$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq S \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S_n$ (1), справедливое при всяком значении числа n и при всяком способе разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные. Итак, числа s_n и S_n – известны, а S – надо определить.



Построим на элементарных $[x_{k-1}, x_k]$ отрезках элементарные прямоугольники третьего вида: на этот раз высота каждого такого прямоугольника будет равна числовому значению $f(\tilde{x}_k)$ функции $f(x)$ в произвольно выбранной точке $\tilde{x}_k$ k -го элементарного отрезка, то есть ординате дуги в произвольной точке этого элементарного отрезка, то есть $m_k \leq f(\tilde{x}_k) \leq M_k$.

Тогда площадь элементарного прямоугольника равна $f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$, а площадь всей фигуры Φ_n ,

$$\sigma_k = \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k.$$

Сама фигура Φ_n – есть ступенчатая фигура, занимающая некоторое промежуточное положение между фигурами C_n и D_n . Из характера взаимного расположения фигур C_n , D_n и Φ_n вытекает, по свойству монотонности площади (площадь объемлющей фигуры больше площади объемлемой фигуры), следующее двойное неравенство:

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad \text{или} \quad s_n \leq \sigma_n \leq S_n \quad (2)$$

Неравенство справедливо при всяком n и при любом способе разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные и при любом выборе $\tilde{x}_k$ в элементарных отрезках.

Границы фигуры Φ_n будут как угодно близки к границе криволинейной трапеции T при достаточно мелком разбиении отрезка $[a, b]$, то есть при достаточно малом значении $\max \Delta x_k$ и соответственно большом значении n .

Заметим, что если точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ остаются концами элементарных отрезков, то при уменьшении $\max \Delta x_k$ величина s_1 монотонно возрастает, оставаясь меньше $S_1 = M(b-a)$, а S_n убывает, оставаясь больше $S_1 = m(b-a)$, где M и m – наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то есть s_n и S_n стремятся к определенному пределу.

Допустим, что суммы s_n и S_n имеют общий предел при $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ (при этом $n \rightarrow \infty$), то есть независимо от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки.

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} s_n = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} S_n \quad (3)$$

Это означает следующее: при всяком $\varepsilon > 0$ независимо от способа разбиения отрезка $[a, b]$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, зависящее от ε , что при всех достаточно мелких разбиениях отрезка $[a, b]$, характеризуемых неравенством $\max \Delta x_k < \delta(\varepsilon)$, будут справедливы неравенства $|s_n - A| < \varepsilon$ и $|S_n - A| < \varepsilon$.

Если допустить справедливость равенств (3), то с помощью неравенств (2) и известного признака существования предела получаем $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sigma_n = A$.

Кроме того, из неравенства (1) следует $S=A$.

Итак, если суммы s_n и S_n имеют общий предел A при $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, то площадь S криволинейной трапеции T будет равна этому пределу A :

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} s_n = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} S_n$$

$$\text{Итак, } S = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k.$$

Площадью криволинейной трапеции называется предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры, составленной из элементарных прямоугольников, когда наибольшая из длин их оснований стремится к нулю.

2. Интегральная сумма. Определенный интеграл.

Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ задана непрерывная функция $f(x)$, причем знак $f(x)$ на $[a, b]$ безразличен. Составим для нее интегральную сумму.

- 1) Для этого разобьем произвольным способом числовой отрезок $[a, b]$ на n малых отрезков, называемых элементарными, с помощью промежуточных значений

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \text{ где } x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим длины элементарных отрезков через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, n$).

- 2) Выберем, далее, в каждом элементарном отрезке произвольное числовое значение $x = \tilde{x}_k$ аргумента x , вычислим соответствующее значение $f(\tilde{x}_k)$ функции $f(x)$ и составим произведение этих значений функции на длины элементарных отрезков: $f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$.

- 3) Составим сумму σ_n всех таких произведений $\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$ (3).

Она называется интегральной суммой.

Каждому данному разбиению отрезка $[a, b]$ на n элементарных отрезков соответствует бесконечно много числовых значений интегральной суммы σ_n , то есть имеется полная свобода в выборе чисел $\tilde{x}_k$ в элементарных отрезках, и в выборе числа n элементарных отрезков.

Допустим, что при $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, то есть при неограниченном уменьшении длин всех элементарных отрезков, и следовательно, при неограниченном возрастании их числа ($n \rightarrow \infty$), интегральная сумма σ_n имеет предел C , то есть для каждого положительного числа ε независимо от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора значений $\tilde{x}_k$ в элементарных отрезках можно указать такое положительно число $\delta(\varepsilon)$, зависящее от ε , что при всех достаточно мелких разбиениях отрезка $[a, b]$, таких, что $\max \Delta x_k < \delta(\varepsilon)$, будет справедливо неравенство $|\sigma_n - C| < \varepsilon$ (4).

Такой предел C (если он существует) называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а сама функция $f(x)$ называется в этом случае интегрируемой на этом отрезке.

Определение. Определенным интегралом $\int_a^b f(x) dx$ от функции $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$ называется предел в смысле (4), к которому стремится интегральная сумма (3), когда

наибольшая из длин элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k) \Delta x_k \quad (5).$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования, $f(x)$ называется подынтегральной функцией, и $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x называется переменной интегрирования (и может быть заменен любой другой буквой).

Приведенное общее определение принадлежит Риману, который впервые высказал его в общей форме и исследовал область его применения. И саму сумму σ называют римановой суммой, хотя еще Коши пользовался пределами подобных сумм для случая непрерывной функции (Бернгард Риман – выдающийся немецкий математик – 1826-1866 гг.).

Кстати, приведенное обозначение для определенного интеграла ввел французский математик и физик – Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830). Эйлер писал так:

$$\int Pdx \left[\begin{matrix} omx = a \\ dox = b \end{matrix} \right]$$

Результат решения задачи о площади можно сформулировать так: площадь S криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, дугой графика непрерывной функции $f(x)$, принимающей на этом отрезке положительное значение, и двумя крайними ординатами $f(a)$ и $f(b)$, равняется определенному интегралу от функции $f(x)$, взятому по отрезку $[a, b]$: $S = \int_a^b f(x)dx \quad (6).$

3.Классы интегрируемых функций.

Теперь нужно выяснить, при каком условии, налагаемом на подынтегральную функцию $f(x)$, предел (3) заведомо существует. Доказывается, что для этого достаточно потребовать непрерывности подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Теорема 1. Для всякой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ предел (3) существует, то есть определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ есть вполне определенное число.

Теорема 2. Если ограниченная функция $f(x)$ в $[a, b]$ имеет лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема.

Теорема 3. Монотонная ограниченная функция $f(x)$ всегда интегрируема.