ЛЕКЦИЯ N 10.
Комплексные числа. Действия над ними. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования: табличный, подстановкой.

1.Комплексные числа и действия над ними.

Понятие комплексного числа.

Комплексными числами называются выражения $z=a+bi=a+ib$, где a, b – действительные числа, а i – специальный символ; при этом для комплексных чисел $z_1=a_1+ib_1$; $z_2=a_2+ib_2$, введем понятия равенства и арифметические операции по следующим правилам: $z_1=z_2$ тогда и только тогда, когда 1) $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$, $a+0i=a$, $0+bi=bi$, $1\cdot i=i$.

2) $z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$

3) $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2)$

4) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\dfrac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$ $(a_2^2+b_2^2\neq 0)$.

Из (1) и (3) следует, что $i^2=-1$.

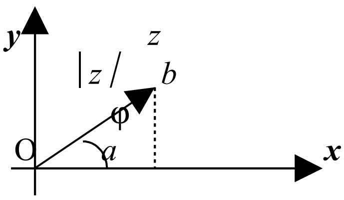
Операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности: $z_1+z_2=z_2+z_1$; $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$, ассоциативности: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$, дистрибутивности: $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$.

С комплексными числами можно оперировать также, как с буквенными выражениями в алгебре, но при этом операции упрощаются тем, что $i^2=-1$.

Из свойства $a+0i=a$ следует, что множество всех комплексных чисел содержит в себе как часть множество действительных чисел.

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Всякое комплексное число $z=a+ib$ мы можем изображать как точку на плоскости с координатами a и b



Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называют комплексной плоскостью. Начало координат, которому соответствует число 0, называют нулевой точкой. При таком изображении комплексных чисел действительные числа изображаются точками оси абсцисс, точки же оси ординат представляют чисто мнимые числа. Поэтому, ось абсцисс называют действительной осью, ось ординат – мнимой осью. Комплексное число z можно изображать вектором, начало которого находится в нулевой точке, а конец в точке z. При таком изображении комплексного числа его действительная часть и коэффициент при мнимой части являются проекциями вектора на действительную и мнимую оси.

Понятие о модуле и аргументе.

Число $\bar{z}=a-ib$ называется сопряженным к комплексному числу $z=a+ib$. Действительное число $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем комплексного числа z. Очевидно, что $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

Если комплексное число $z=a+ib$ трактовать как точку (вектор) $M(a, b)$ плоскости xOy, то $|z|$ равен расстоянию точки $M(a, b)$ от начала координат.

Если на плоскости ввести полярные координаты (ρ, φ), то $a=\rho cos\varphi=|z|cos\varphi$, $b=\rho sin\varphi=|z|sin\varphi$, $(|z|>0)$ (1)

В силу этого комплексное число z можно записать в форме $z=\rho(cos\varphi+i\cdot sin\varphi)$, где ρ - модуль числа z, φ - угол (в радианах), который составляет вектор $\vec{OM}$ с положительным направлением оси x. Этот угол называют еще аргументом комплексного числа z и обозначают символом $\varphi=arg\ z$ $(0\le\varphi<2\pi)$.

Очевидно, что $\varphi=arg\ z$ есть однозначная функция от $z\neq0$.

Вводят еще и многозначную функцию (аргумент z с большой буквы)

$\varphi=Arg\ z=arg\ z+2k\pi$ $(k=0; \pm1; \pm2;\ldots)$,

$$arg\ z=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}; x>0 \\ \pi+arctg\dfrac{y}{x}; y>0, x<0 \\ -\pi+arctg\dfrac{y}{x}, y<0, x<0 \\ +\dfrac{\pi}{2}, x=0, y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, x=0, y<0 \end{cases}$$

которая дает все значения φ, для которых для данного $z\neq0$ удовлетворяются равенства (1) $arg\ z$ называют еще аргументом в приведенной форме.

Числа a и b называют действительной и мнимой частью z и обозначают символами $a=Rez$, $b=Imz$ (*Re* от французского слова *reelle*, *Im – imaginaire*). Итак, $z=Rez+i\cdot Imz$.

По определению, $e^{i\varphi}=cos\varphi+i\cdot sin\varphi$ $(-\infty<\varphi<+\infty)$ (3).

Если $z=x+iy$, то множество точек z плоскости xOy, удовлетворяющих равенству $|z|=R$ ($\sqrt{x^2+y^2}=R$), есть окружность радиуса R с центром в начале координат.

Так как $|e^{i\varphi}|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1$, то при непрерывном изменении φ на полуинтервале $0\le\varphi<2\pi$, точка $e^{i\varphi}$ непрерывно описывает окружность радиуса *1* с центром в точке $z=0$.

Справедливы равенства $e^{i(\varphi1+\varphi2)}=e^{i\varphi1}e^{i\varphi2}$, $e^{-i\varphi}=\dfrac{1}{e^{i\varphi}}$ (3$'$)

Для произвольной комплексной переменной $z=x+iy$ функция e^z определяется при помощи равенства $e^z=e^xe^{iy}$, $z\neq0$. Отсюда, в силу (3) $e^z=e^x(cosy+i\cdot siny)$ (4).

На основании (2), (3) всякое комплексное число z можно представить в форме $z=\rho e^{i\varphi}$ $(\rho\ge0)$ (5). Выражения (2) и (5) называются *тригонометрической* и *показательной* формой комплексного числа z.

Пример. Записать число $(1+i)$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. $\rho=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$; $arg\ z=arctg\dfrac{y}{x}=arctg\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{4}$, т.е. $1+i=\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Из равенств (3) и (3$'$) получаем формулу Муавра $(cos\varphi+i\cdot sin\varphi)^n=e^{in\varphi}=cosn\varphi+i\cdot sinn\varphi$

$[r(cos\varphi+isin\varphi)]^n=r^n(cosn\varphi+i\cdot sinn\varphi)$ (6).

Справедливо также равенство $z_1z_2=|z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, то есть при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются независимо от того, в какой форме они взяты: в приведенной или нет; или $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, то есть модуль частного двух комплексных чисел равен разности аргументов делимого и делителя.

Полагая $z=\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, определим $\sqrt[n]{z}$ как комплексное число, которое, будучи возведено в степень n, равно z. Модуль этого числа будет равен $\sqrt[n]{|z|}$, аргумент же будет равен $\frac{\varphi+2k\pi}{n}$, где k – любое целое число. Давая k значения $0, 1, 2,\ldots, n-1,$ получим n различных значений аргумента выражения $\sqrt[n]{z}$, то есть $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений согласно формуле $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\,(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, $k=0, 1, 2,\ldots, n-1$.

Геометрически эти n значений выражения $\sqrt[n]{z}$, очевидно, изображаются вершинами некоторого правильного n-угольника, вписанного в окружность, с центром в нулевой точке, радиуса $\sqrt[n]{\rho}$.

2.Неопределенный интеграл, свойства, таблица интегралов.

В дифференциальном исчислении решалась задача нахождения производной по данной функции. Но часто бывает необходимо решить обратную задачу, а именно: для данной функции $f(x)$ найти такую функция $F(x)$, производная которой равнялась бы заданной функции $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$.

С точки зрения механической это означает, что по известной скорости движения материальной точки необходимо восстановить закон ее движения.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x)=f(x)$.

Аналогично рассматривается понятие первообразной и на отрезке $[a, b]$, но в точках a и b рассматривают односторонние производные.

Пример. Функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$ есть первообразная от функции $f(x)=x^2$ на интервале $(-\infty; +\infty)$, так как $F'(x)=(\frac{x^3}{3})'=x^2$.

Отыскание по данной функции ее первообразной – основная задача интегрального исчисления. Для всякой ли функции существует первообразная?

Теорема. Любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную.

Задача отыскания по данной функции ее первообразной решается неоднозначно.

Теорема 2. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на (a, b), то $F(x)+C$ – также первообразная, где C – любое постоянное число.

Теорема 3. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$ на (a, b), то $F_1(x)-F_2(x)=C$ на (a, b), где C – некоторая постоянная.

Из теоремы вытекает, что если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на (a, b), то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на (a, b) имеет вид $\Phi(x)=F(x)+C$, где C – некоторая const.

Определение. Произвольная первообразная для $f(x)$ на (a, b) называется неопределенным интегралом для функции $f(x)$ и обозначается так $\int f(x)dx$ («неопределенный интеграл $f(x)$ на dx»).

$\int$ - интеграл, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция.

Итак, если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, то согласно сказанному $\int f(x)dx=F(x)+C$, где C – соответствующим образом подобранная const.

Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием функции $f(x)$.

Свойства неопределенного интеграла.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$. В самом деле, $\int f(x)dx = F(x)+C$, отсюда $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = dF(x) = F^{/}(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int dF(x) = F(x)+C$, так как $\int dF(x) = \int F^{/}(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$.
3. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx + C$, где A – постоянное число, C – некоторая const.
4. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C$, где C – const.

Доказательство. $(\int f(x)dx + \int g(x)dx)^{/} = (\int f(x)dx)^{/} + (\int g(x)dx)^{/}$ ⇒по определению⇒*f(x)+g(x)*.

С другой стороны, $(\int [f(x)+g(x)]dx)^{/}$ ⇒ по определению⇒*f(x)+g(x)*.

Итак, функция $\int fdx + \int gdx$ и $\int (f+g)dx$ являются первообразными для одной и той же функции *f*+*g*. Но тогда они отличаются на некоторую const *C*, что и написано в 4.

Геометрический смысл неопределенного интеграла.

Назовем график первообразной функции от *f(x)* интегральной кривой. Неопределенный интеграл геометрически представляется семейством всех интегральных кривых.

Все кривые этого семейства *y=F(x)+C* могут быть получены из одной интегральной кривой параллельным сдвигом в направлении оси *Oy*. Запишем таблицу интегралов, вытекающую из основных формул дифференциального исчисления.

1. $\int 0\cdot dx = C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$

3. $\int dx = x + C$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int \sin xdx = -\cos x + C$

6. $\int \cos xdx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}; -1 < x < 1.$

$$11.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$$

$$12.\int e^x dx = e^x + C$$

$$13.\int shx dx = chx + C$$

$$14.\int chx dx = shx + C$$

$$15.\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$16.\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$$

$$17.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C = Arshx + C$$

$$18.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C = Archx + C(|x|> 1$$

$$19.\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$20.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\lambda}| + C$$

$$21.\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Отметим, что если операции дифференцирования снова приводят к элементарным функциям, то операция интегрирования уже может привести к неэлементарным функциям, то есть к функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций.

Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях: $\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона; $\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ - интегралы Френеля; $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм; $\int \frac{\cos x}{x}dx$ - интегральный косинус; $\int \frac{\sin x}{x}dx$ - интегральный синус.

3.Интегрирование подстановкой (заменой переменной).

Метод заключается в преобразовании аргумента подынтегральной функции по некоторой формуле, рассчитанной на то, чтобы интеграл относительно новой переменной оказался проще для вычисления.

Итак, пусть для вычисления неопределенного интеграла $\int f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ произведена подстановка: $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонна и имеет непрерывную производную. Так как $x=\varphi(t)$, то $f(x)=f[\varphi(t)]$, $dx=\varphi'(t)dt$.

Итак, приводим исходный интеграл к виду $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, где $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ есть непрерывная функция аргумента t, то есть $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. После вычислений полученного интеграла надо еще заменить в результате t на $\psi(x)$, чтобы вернуться к первоначальной переменной x.

Пример. $\int \cos 3x dx \Rightarrow \begin{matrix} u = 3x \to x = \frac{u}{3} \\ dx = \frac{1}{3}du \end{matrix} \Rightarrow \int \cos u \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \cos u du = \frac{1}{3}\sin u + C \Rightarrow \frac{1}{3}\sin 3x + C$

4. Подведение под знак дифференциала.

Пример.

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow \int \arcsin x d(\arcsin x) \Rightarrow \int u du = \frac{u^2}{2} + C \Rightarrow \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$$

Пример. $\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$

Пример. $\int \frac{2xe^{x^2} dx}{1+e^{2x^2}} = \int \frac{d(e^{x^2})}{1+(e^{x^2})^2} = arctg(e^{x^2}) + C$

Пример.

$$\int \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt[3]{\sin x} d(\sin x) = \int (\sin x)^{\frac{1}{3}} d(\sin x) = \frac{(\sin x)^{1/3+1}}{1/3+1} = \frac{(\sin x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^4 x} + C.$$

Пример. $\int \frac{(4x+6)dx}{2x^2+6x+7} = \int \frac{d(2x^2+6x+7)}{2x^2+6x+7} = \ln|2x^2+6x+7| + C$