

ЛЕКЦИЯ №6.

Правило Бернулли-Лопиталя. Формула Тейлора.

1.Правило Бернулли-Лопиталя раскрытия неопределенностей.....	1
2.Формула Тейлора.....	3

1.Правило Бернулли-Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Раскрытием неопределенностей в математическом анализе называют отыскание предела $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, когда функция $F(x)$ непрерывна вблизи точки $x=a$, но не определена в самой этой точке, а непосредственная подстановка в формулу записи этой функции значения $x=a$ приводит к выражению неопределенного вида: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty; 0^0; \infty^0$.

1 случай. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ (при $x \rightarrow a$). Пусть нужно найти $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

Положим $f(a)=\varphi(a)=0$, тогда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут непрерывными в точке $x=a$.

Положим, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ – дифференцируемы в окрестности точки a и $\varphi'(x) \neq 0$.

Теперь $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут удовлетворять условиям теоремы Коши для любого сегмента

$$[x, a], \text{ где } x \text{ принадлежит окрестности точки } a. \text{ Поэтому } \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Это равенство, так как $f(a)=\varphi(a)=0$, где $c \in (x, a)$. Заметим, что c зависит от x , но при $x \rightarrow a$ величина c также стремится к a . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

В этом предельном равенстве ничего не изменится, если c заменить просто символом x (то есть предел функции не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент).

Доказана теорема:

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ функции, дифференцируемые всюду в некоторой окрестности т. a , кроме, может быть, самой этой точки. Причем $\varphi(x) \neq 0$. Если существует конечный или

бесконечный предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = L$, то искомый предел

отношения функций в этом случае также существует и равен пределу отношения производных.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = L, (3)$$

Равенство (3) и называется правилом **Бернулли-Лопиталя**.

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}. \text{ Решение. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{1} = 5$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность $0/0$, то вновь можно применить правило Лопиталя и перейти к отношению вторых производных и так далее.

$$\text{Пример 2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 4x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16 \cos 4x}{2} = 8$$

2 случай. Правило Лопиталя остается в силе и в случае, когда $a = \infty$

$$\text{Пример 3. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\arctg x - \frac{\pi}{2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = -1$$

3 случай. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ (при $x \rightarrow a$).

Правило Лопиталя работает и здесь.

$$\text{Пример 4. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{ctgx} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(ctgx)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

4 случай. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ (при $x \rightarrow \infty$).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

$$\text{Пример 5. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Пример 6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Пример 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n}$ (n – целое положительное число).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n!x^{n-n}} = \infty$$

Что показывает, что показательная функция e^x растет быстрее, чем любая положительная степень x^n аргумента x , как бы велик не был показатель степени n .

5 случай. Неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)\varphi(x)]$, если $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = \infty$. Этот случай преобразованием выражения $f(x) \cdot \varphi(x)$ сводится к раскрытию неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 8. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} tg 2x [tg x - ctgx]$

Решение. $tg 2x \rightarrow \infty$ и $tg x - ctgx \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pi/4$, то есть $\lim_{x \rightarrow \pi/4} tg 2x [tg x - ctgx] = \infty \cdot 0$.

Преобразуем выражение:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} tg 2x [tg x - ctgx] = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{tg x - ctgx}{ctg 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}}{-2} = -2.$$

6 случай. Неопределенности вида 1^∞ , 0^0 , 0^0 , часто приводятся к случаям неопределенностей вида $0/0$ или ∞/∞ с помощью логарифмирования выражений $[f(x)]^{\varphi(x)}$.

7 случай. Неопределенность $\infty \cdot \infty$

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}) \rightarrow \infty - \infty =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \cdot \sin x} = 0.$$

Пример 0^0 . $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}; (1+x^2) \rightarrow +\infty; 1/x \rightarrow 0$ и имеем неопределенность вида 0^0 .

Обозначим $y = (1+x^2)^{1/x}$, логарифмируем: $\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x^2)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

Но $\ln y$ – функция непрерывная, поэтому $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln y) = \ln(\lim_{x \rightarrow +\infty} y)$, мы знаем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = 0$,

то есть $\ln(\lim_{x \rightarrow +\infty} y) = 0$, тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$, то есть $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.

Замечание. Согласно правилу Лопиталя: если существует предел отношения производных данных функций, то существует и предел отношения самих функций. Если же предела производных не существует, то это вовсе не означает, что не существует предел отношения самих функций.

Пример. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\sin x}{x}) = 1$, но $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ не

существует, так как $\cos x$ при $x \rightarrow +\infty$ не имеет предела (± 1).

2.Формула Тейлора.

Формула Тейлора дает возможность представить произвольную $(n+1)$ раз дифференцируемую в окрестности некоторой точки $x=a$ функцию $f(x)$ в виде многочлена $P_n(x)$ n -ой степени относительно разности $x-a$, называемого многочленом Тейлора и дать оценку погрешности этого приближения.

Формула Тейлора является основой приближенных вычислений математического анализа, так как многочлен, представляющий функцию $f(x)$ общего вида, является легко вычислимым выражением.

Пусть $f(x)$ – многочлен n -ой степени относительно x : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Преобразуем многочлен в многочлен той же n -ой степени относительно разности $x-a$, где a – произвольное число, то есть получим $f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n$.

Продифференцируем это равенство n раз подряд:

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \dots + nA_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x-a) + 4 \cdot 3A_4(x-a)^2 + \dots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^n(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2A_n$$

$$f^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) = \dots = 0.$$

Пусть $x=a$, и найдем все коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$A_0 = f(a); A_1 = f'(a); A_2 = \frac{1}{2!} f''(a); A_3 = \frac{1}{3!} f'''(a), \dots, A_n = \frac{1}{n!} f^n(a).$$

Итак, искомое разложение многочлена n -ой степени $f(x)$ по степеням разности $x-a$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Это формула Тейлора для многочлена n -ой степени: $f(a); f'(a)/1!; f''(a)/2!; \dots; f^{(n)}(a)/n!$ – это коэффициенты Тейлора.

Пример. Разложить $f(x)=1+2x-x^2+x^3$ по степеням разности $x-1$.

Решение. $f(x)=1+2x-x^2+x^3; f(1)=3;$

$$f'(x)=2-2x+3x^2; f'(1)=3;$$

$$f''(x)=-2+6x; f''(1)=4;$$

$$f'''(x)=6; f'''(1)=6;$$

$$f^{(4)}(x)=0; f^{(4)}(1)=0;$$

$$f(x)=3+\frac{3}{1!}(x-1)+\frac{4}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3=3+3(x-1)+2(x-1)^2+(x-1)^3.$$

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция, $(n+1)$ раз дифференцируемая в окрестности точки $x=a$.

Составим многочлен Тейлора n -ой степени $P_n(x)$ для функции $f(x)$, то есть многочлен n -ой степени, коэффициентами которого являются коэффициенты Тейлора, то есть числа $f(a); f'(a)/1!; f''(a)/2!; \dots; f^{(n)}(a)/n!:$

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)$$

Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ в виде: $f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x)$ (2), где $R_{n+1}(x)$ – погрешность приближенного равенства $f(x) \approx P_n(x)$.

Формула $P_n(x)=\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ (1') называется многочленом Тейлора для функции

$f(x)$, формула (2) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$, где $R_{n+1}(x)$ – остаточный член формулы Тейлора.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена и $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки a . Пусть x – произвольное значение аргумента из этой окрестности.

Тогда существует точка $c \in (a, x)$ такая, что $R_{n+1}(x)=f(x)-P_n(x)=f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, $c \in (x, a)$.

Это остаточный член в форме Лагранжа.

При $a=0$ получаем частный случай формулы Тейлора – формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Заменим a на x и x на $x+h$ (то есть $x-a=x+h-x=h$), тогда получим следующий вид

$$\text{формулы Тейлора: } f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Здесь c заключено между x и $x+h$, поэтому, можно записать $c=x+\theta h$, где $0<\theta<1$, поэтому,

$$\text{остаточный член будет такой: } R_n(x)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h); 0<\theta<1$$

Так как h – приращение аргумента, то положим $h=dx$, тогда, $f'(x)h=f'(x)dx=dy$;

$$f''(x)dx^2=d^2y; \dots; f^{(k)}(x)dx^k=d^ky \text{ и}$$

$$\text{получим } f(x+h)=f(x)+dy+\frac{1}{2!}d^2y+\frac{1}{3!}d^3y+\dots+\frac{1}{n!}d^ny+R_n(x) \text{ или}$$

$$f(x+h)-f(x)=\Delta y=dy+\frac{1}{2!}d^2y+\dots+\frac{1}{n!}d^ny+R_{n+1}(x) \quad (3), \text{ причем } R_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\tilde{y};$$

$d^{n+1}\tilde{y}$ – значение $d^{n+1}y$, соответствующее аргументу $x+\theta dx$ ($0<\theta<1$).

Формула (3) показывает, что формула Тейлора есть не что иное, как разложение приращения функции по ее последовательным дифференциалам.

Положим, что $f^{(n+1)}(x)$ – непрерывная в окрестности точки $x=a$ функция и запишем $f^{(n+1)}(c)$, где $a < c < x$ или $x < c < a$, в виде $f^{(n+1)}(a) + \alpha$, где α – бесконечно малая при $x-a \rightarrow 0$, то есть при $x \rightarrow a$.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a) + \alpha}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Это формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Найдем разложение по формуле Маклорена некоторых основных элементарных функций.

1) Разложение функции $f(x) = e^x$.

$$f^{(1)}(x) = e^x \rightarrow f(0) = f^{(k)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = e^x$$

.....

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad f^{(n+1)}(c) = e^c$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

Пример. Вычислим e с точностью до 0,0001.

$$\text{Положим } x=1, \text{ тогда } e^1 = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^c$$

Чтобы получить ошибку $\varepsilon \leq 0,0001$, надо определить n из того условия, чтобы $\frac{1}{(n+1)!} e^c < 0,0001$.

$$\text{Так как } 0 < c < 1, \text{ то } e^c < 3, \text{ поэтому, при } n=7 \quad \frac{1}{8!} 3 < \frac{3}{40320} < 0,0001$$

$$\text{Итак, } e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{7!} \approx 2,7183.$$

2) Разложение функции $f(x) = \sin x$. Имеем $f^{(k)}(x) = \sin(x + k \cdot \pi/2)$; $f^{(2k)}(0) = 0$; $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$.

$$\text{Пусть } n=2k+1: \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+3}(x), \quad \text{где } R_{2k+3}(x) =$$

$$\frac{(-1)^{k+1} x^{2k+3}}{(2k+3)!} \sin[\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}], \quad 0 < \theta < 1.$$

3) Разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$.

$$f(x) = 1/(1+x); f'(x) = -1/(1+x)^2; f''(x) = 1 \cdot 2/(1+x)^3, \dots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\text{При } x=0: f(0)=0; f'(0)=1; f''(0)=-1; f'''(0)=2!, \dots, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + R_n(x)$$

$$\text{Здесь } R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

$$4) \quad \cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x) \quad [1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots]$$

$$5) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_{n+1}(x).$$

Пример. Разложить функцию $\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до члена с x^3 включительно.

$$\text{Решение. } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x; f''(x) = 2 \cos^{-3} x \sin x; f'''(x) = 6 \cos^{-4} x \sin x + 2 \cos^{-2} x$$

Отсюда $f(0)=0; f'(0)=1; f''(0)=0; f'''(0)=2$.

$$\operatorname{tg} x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + 0 \cdot x^4 = x + \frac{2x^3}{3} + 0 \cdot x^4.$$

Пример. $f(x) = \ln \cos x$ до члена, содержащего x^4 включительно.

Знаем, что $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0 \cdot x^4$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0 \cdot x^4\right) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + 0(t^3) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0(x^4)\right)^2 + 0\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0(x^4)\right)^3 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + 0(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + 0(x^4).$$

Пример. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + 0(x^4) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + 0(x^4)\right) - 3x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0(x^4)}{x^4} = 0.$$