ЛЕКЦИЯ N4.
Дифференциал функции первого и высших порядков. Инвариантность формы дифференциала. Производные высших порядков. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

1.Понятие дифференциала.

Таким же важным, как и понятие производной в математическом анализе, является и понятие дифференциала функции.

Вернемся к определению производной: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$ (предел отношения бесконечно малого приращения функции к бесконечно малому приращению аргумента).

Мы знаем, что переменная величина, имеющая предел, может быть представлена в виде суммы этого предела и бесконечно малой: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$, где α - бесконечно малая (1)

Отсюда имеем, $\Delta y=(y'+\alpha)\Delta x=y'\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$.

Эта формула определяет связь между приращением Δy всякой дифференцируемой функции $y=f(x)$ и приращением ее аргумента Δx.

Величина α - бесконечно мала одновременно с Δx: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

Поэтому, второе слагаемое $\alpha\cdot\Delta x$ будет бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx (как произведение двух бесконечно малых Δx и α); в то же время, как первое слагаемое $y'\Delta x$ будет бесконечно малой того же порядка, что и Δx (если только $y'\neq 0$ при данном значении аргумента x). Таким образом, формула определяет бесконечно малое приращение Δy дифференцируемой функции y (при $y'\neq 0$) в виде суммы двух слагаемых: одного $(y'\cdot\Delta x)$ – того же порядка малости, что и Δx; другого $(\alpha\cdot\Delta x)$ – более высокого порядка малости. Поэтому первое слагаемое $y'\cdot\Delta x$ будет главной частью приращения функции Δy.

Определение. Эту главную часть приращения функции, пропорциональную приращению аргумента, называют ***дифференциалом*** функции и обозначают символом dy: $dy=y'\cdot\Delta x$ (2)

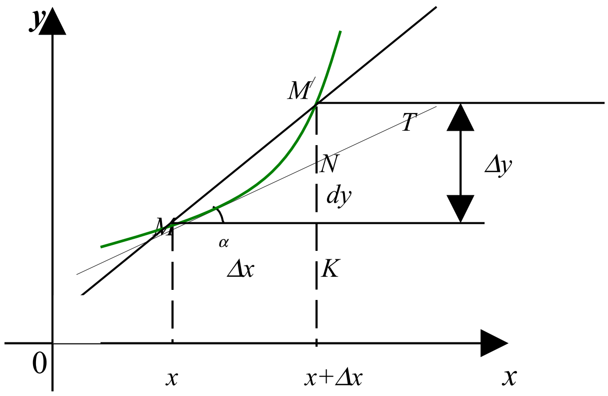
Применив эту формулу к функции $y=x$, получим $dy=dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$.Поэтому, естественно под дифференциалом аргумента функции понимать приращение $dx=\Delta x$, то есть под символом dx понимают и приращение аргумента, и дифференциал функции, равной аргументу. Теперь, формулу (2) можно записать $dy=y'dx$ (3), а формулу (1) в виде $\Delta y=y'dx+\alpha\cdot dx$ (4). Итак, установлено:

1) Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента (независимой переменной).
2) Разность между приращением функции Δy и ее дифференциалом dy есть величина бесконечно малая более высокого порядка малости, чем приращение аргумента Δx,

а также (при $y^{/}\neq 0$) более высокого порядка, чем приращение функции Δy и ее дифференциал dy.

3) Приращение функции Δy и ее дифференциал dy при бесконечно малом Δx являются равносильными бесконечно малыми $dy\approx\Delta y$ (5).

Посмотрим, каков же геометрический смысл дифференциала



Возьмем на графике функции некоторую точку $M(x, y)$ и другую точку $M^{/}$, абсцисса которой $x+\Delta x$. Проведем касательную MN к графику функции в точке $M(x, y)$. По определению известно, что $tg\alpha=y^{/}$. А из треугольника KMN известно, что $NK=MK\cdot tg\alpha=y^{/}\Delta x=y^{/}dx=dy$. Итак, $NK=dy$.

Геометрический смысл: значение дифференциала функции при данном значении аргумента x и данном приращении Δx равно приращению ординаты касательной, проведенной в точке с абсциссой x графика этой функции, при переходе от точки касания (с абсциссой x) к точке касательной (с абсциссой $x+\Delta x$).

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x дифференциал, то она имеет в этой точке производную. Верно и обратное.

Вернемся к определению дифференциала: $dy=f^{/}(x)dx$.

Разделим обе части на dx и получим $\dfrac{dy}{dx}=f^{/}(x)$.

Определение. Производная функции равна отношению ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной.

2.Дифференциал суммы, произведения и частного.

1) Если c – $const$, то $dc=(c^{/})dx=0\cdot dx=0$
2) $d[cu(x)]=[cu(x)]^{/}dx=cu^{/}(x)dx=cd(u(x))$, то есть постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала.
3) $d[u(x)+v(x)+\omega(x)]=[u(x)+v(x)+\omega(x)]^{/}dx=[u^{/}(x)+v^{/}(x)+\omega^{/}(x)]dx=u^{/}(x)dx+v^{/}(x)dx+\omega^{/}(x)dx=d[u(x)]+d[v(x)]+d[\omega(x)]$ – дифференциал суммы равен сумме дифференциалов слагаемых.
4) $d[u(x\cdot)v(x)\cdot\omega(x)]=[u(x)\cdot v(x)\cdot\omega(x)]^{/}dx=[u^{/}(x)\cdot v(x)\cdot\omega(x)+u(x)\cdot v^{/}(x)\cdot\omega(x)+u(x)\cdot v(x)\cdot\omega^{/}(x)]dx=u^{/}(x)\cdot v(x)\cdot\omega(x)dx+v^{/}(x)\cdot u(x)\cdot\omega(x)dx+\omega^{/}(x)\cdot u(x)\cdot v(x)dx=v(x)\cdot\omega(x)\cdot d[u(x)]+u(x)\cdot\omega(x)\cdot d[v(x)]+u(x)\cdot v(x)\cdot d[\omega(x)]$, то есть дифференциал произведения равен сумме произведений дифференциалов каждого из сомножителей на все остальные сомножители.
5) $d\dfrac{u(x)}{v(x)}=(\dfrac{u(x)}{v(x)})^{/}dx=\dfrac{v(x)\cdot u^{/}(x)-u(x)\cdot v^{/}(x)}{v^{2}(x)}dx=\dfrac{v(x)\cdot u^{/}(x)dx-u(x)\cdot v^{/}(x)dx}{v^{2}(x)}=$

$$=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)},\ v(x)\neq 0.$$

Пример. Найти дифференциал функции $y=x^2e^x$.

Решение. $dy=x^2d(e^x)+e^xd(x^2)=x^2(e^x)'dx+e^x(x^2)'dx=x^2e^xdx+e^x2xdx=xe^x(x+2)dx$.

3.Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала.

Итак, если x является независимой переменной, то дифференциал функции $y=f(x)$ можно записать так: $dy=f'(x)dx$.

Покажем, что эта форма сохраняется и в случае, если x является не независимой переменной, а функцией. Действительно, пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$, то есть y – сложная функция от t: $y=f[\varphi(t)]$. Тогда, $dy=y_t'dt$.

По правилу дифференцирования сложной функции: $y_t'=y_x'\cdot x_t'$. Отсюда, $dy=y_x'\cdot x_t'dt=y_x'dx=f'(x)dx$. Этим мы доказали следующее:

<u>Теорема.</u> Дифференциал сложной функции $y=f(x)$, для которой $x=\varphi(t)$, имеет такой же вид, $dy=f'(x)dx$, как и в том случае, когда аргумент x является независимой переменной. Это свойство называется – ***инвариантность формы дифференциала.***

4.Производные высших порядков.

Если задана произвольная дифференцируемая функция $y=f(x)$, тогда ее производная $y'=f'(x)$ в свою очередь является функцией того же аргумента x. Поэтому, можно видимо искать производную и от этой функции. Производная от производной данной функции, если она существует, называется производной второго порядка, или второй производной от данной функции $y''=f''(x)$, то есть $(y')'=y''=f''(x)$. Здесь $y'=f'(x)$ – производная первого порядка.

Механический смысл: $v=s'=f'(t)$; $\omega=v'=s''=f''(t)$ – это скорость изменения скорости движения, то есть ускорение.

Можно ввести и дальнейшие производные: $(y'')'=y'''$, $(y''')'=y^{IV}=f^{IV}(x),\ldots$

Определение. Производной $(n+1)$-го порядка от данной функции называется производная от производной n-го порядка этой функции $(y^n)'=y^{n+1}=f^{n+1}(x)$.

Пример. Найти производную n-го порядка от функции $y=e^{kx}$: $y'=ke^{kx}$; $y''=k^2e^{kx},\ldots$ $y^{(n)}=k^ne^{kx}$.

5.Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Абсолютной погрешностью приближенной величины u_0 называется абсолютная величина разности между точным значением этой величины u и ее приближенным значением u_0: $\Delta u=|u-u_0|$. Границей абсолютной погрешности приближенной величины u_0 называется любое положительное число $\overline{\Delta u}$, не меньше Δu : $|u-u_0|=\Delta u\leq\overline{\Delta u}$.

Отсюда $u_0-\overline{\Delta u}\leq u\leq u_0+\overline{\Delta u}$. Чем меньше $\overline{\Delta u}$, тем точнее найдена величина.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности Δu к модулю приближенного значения u_0 измеряемой величины: $\delta_u=\frac{\Delta u}{|u_0|}$.

Границей относительной погрешности $\overline{\delta_u}$ называется отношение $\overline{\delta_u}=\frac{\overline{\Delta u}}{|u_0|}$. При этом

δ_u и $\bar{\delta}_u$ - часто выражают в процентах. Пусть нам известно значение функции $y=f(x)$ и ее производной в точке x. Найдем значение функции $f(x+\Delta x)$.
Для этого воспользуемся приближенным равенством $\Delta y\approx dy$ или $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$.
Но $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, поэтому $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$, откуда $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$.
Показано, что абсолютная погрешность не превышает $\bar{\Delta}=\frac{M}{2}\cdot(\Delta x)^2$, где M – наибольшее значение $|f''(x)|$ на сегменте $[x, x+\Delta x]$.
Пример. Найти $\cos 61^\circ$.

Решение. $y=f(x)=\cos x$. Пусть $x=60^\circ$ или $x=\frac{\pi}{3}$.

Пусть $x+\Delta x=61^\circ$ или $x+\Delta x=\frac{61\pi}{180}$. Тогда $\Delta x=\frac{61\pi}{180}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{180}\approx 0{,}01745$.
Тогда $\cos(x+\Delta x)\approx\cos x+(\cos x)'\cdot\Delta x$ или $\cos(x+\Delta x)\approx\cos x-\sin x\cdot\Delta x$, то есть

$$\cos 61^\circ\approx\cos 60^\circ-\sin 60^\circ\cdot 0{,}01745\approx\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}01745\approx 0{,}4849.$$

Для оценки погрешности найдем вторую производную $f''(x)=(\cos x)''=-\cos x$, так как $|f''(x)|=|-\cos x|\le 1$ для всех x, то $\bar{\Delta}=\frac{M}{2}\cdot(\Delta x)^2\le\frac{1}{2}\cdot(0{,}01745)^2\approx 0{,}0003$.

6.Дифференциалы высших порядков.

Итак, нам известно, что для функции $y=f(x)$ дифференциал $dy=f'(x)dx$, то есть он зависит от двух переменных: независимой переменной (или аргумента x) и $dx=\Delta x$; причем dx от x не зависит, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от этой точки. Рассматривая $dy=f'(x)dx$ только как функцию x, то есть, считая dx постоянным, можно найти дифференциал этой функции.
Определение. Дифференциал от дифференциала данной функции $y=f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2f(x)$, то есть по определению $d^2y=d(dy)$.
$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=[f'(x)dx]'dx=[f''(x)dx+f'(x)\cdot 0]dx=f''(x)(dx)^2$. Итак, $d^2y=f''(x)(dx)^2$.
Аналогично, можно определить дифференциалы второго, третьего и так далее порядков.
Определение. Дифференциалом n-го порядка (или n-ым дифференциалом) функции $y=f(x)$ называется дифференциал от ее $(n-1)$-го дифференциала: $d^ny=d(d^{n-1}y)$.
Для функции $y=f(x)$, аргумент которой является независимой переменной, справедливо равенство: $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда, $f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$.

Например, $f'(x)=\frac{dy}{dx}$; $f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$; $f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$

Определение. Производной n-го порядка данной функции (при условии, что ее аргумент является независимой переменной) называется отношение ее дифференциала n-го порядка к n-ой степени дифференциала независимой переменной.

Мы знаем, что форма дифференциала первого порядка $dy=f'(x)dx$ обладает свойством инвариантности. Однако форма дифференциала высшего порядка $d^ny=f^n(x)dx^n$ $(n>1)$ не обладает этим свойством инвариантности.

Поэтому, вообще говоря, производную $f^n(x)$ $(n>1)$ в случае, когда x не является независимой переменной, нельзя рассматривать как отношение d^ny к dx^n.

Но условились сохранять запись $f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}$, понимая $\frac{d^n y}{dx^n}$ не как отношение дифференциалов, а как новое символическое обозначение n-ой производной.

7.Дифференцирование неявных функций.

При выводе правила дифференцирования неявных функций будем опираться на тот очевидный факт, что при дифференцировании обеих частей тождества, содержащего аргумент x, тождество сохраняется, то есть, если $f(x)\equiv\varphi(x)$, то и $f'(x)=\varphi'(x)$.

Пусть теперь зависимость между аргументом x и функцией y задана уравнением, не разрешенным относительно y; такая зависимость определяет y как неявную функцию от x: $\varphi(x, y)=0$.

Правило дифференцирования. Если зависимость между аргументом x и функцией этого аргумента y задана уравнением, не разрешенным относительно y, то для отыскания производной от y по x надо продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию от x. Разрешая полученное таким путем уравнение, содержащее x, y и y', относительно y', найдем выражение для y' через x и y.

Пример 1. $x^3+y^3-3axy=0$. Дифференцируем по x: $3x^2+3y^2\cdot y_x'-3a(y+xy_x')=0$

$3x^2+3y^2\cdot y_x'-3ay-3axy_x'=0$. Отсюда, $y_x'=\frac{3ay-3x^2}{3y^2-3ax}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

Пример 2. $xe^y+y=a$. Дифференцируя, получим $e^y+xe^y\cdot y'+y'=0$; и $y'=-\frac{e^y}{xe^y+1}$.

Но так как $e^y=\frac{a-y}{x}$, то $y'=-\frac{a-y}{x(1+a-y)}$

8. Дифференцирование параметрически заданных функций.

Мы рассматривали уравнения линий на плоскости, связывающие текущие координаты точек этих линий. Но часто применяется другой способ задания линий, в котором текущие координаты x и y рассматриваются как функции третьей переменной величины. Пусть даны две функции переменной t:

(1) $\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\}$, рассматриваемых для одних и тех же значений t.

Тогда любому из этих значений t соответствует определенное значение x и определенное значение y, а, следовательно, и определенная точка $M(x, y)$. Когда переменная t пробегает все значения из области определения функции, точка $M(x, y)$ описывает некоторую линию C в плоскости Oxy. Эти уравнения называются параметрическими уравнениями, а t – параметром. Предположим, что функция $x=x(t)$ имеет обратную функцию $t=\Phi(x)$. Подставив это выражение в (1) получим: $y=y[\Phi(x)]$ (2), выражающее y как функцию от x. Переход от уравнения (1) к уравнению (2) называется исключением параметра, а уравнение (1) – это параметрическое уравнение. Исключение параметра не всегда возможно. Итак, пусть функция y от x задана параметрически уравнениями (1): $\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\}$,

причем в некоторой области изменения параметра t функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t)\neq0$. Найдем производную $y_x'=\frac{dy}{dx}$.

Так как $dx=x'(t)dt$, а $dy=y'(t)dt$, то $y_x'=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}=\frac{y_t'}{x_t'}$. Итак, $\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}$. (3)

Пример 1. Найти производную функции y от x, заданной параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin^2 t \\ y &= \sin 2t \end{aligned}\right\}.$$ Решение. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\sin 2t)^{/}}{(\sin^2 t)^{/}} = \dfrac{2\cos 2t}{2\sin t\cos t} = 2ctg2t$

Пример 2. $\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}.$ Решение. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{[a(1 - \cos t)]^{/}}{[a(t - \sin t)]^{/}} = \dfrac{a\cdot\sin t}{a\cdot(1 - \cos t)} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

По формуле (3) можно находить и производные высших порядков функций, заданных параметрически: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$. Но по формуле (3) производная находится как некоторая функция параметра *t,* то есть $\dfrac{dy}{dx} = f(t)$. Поэтому при нахождении второй производной имеем: $\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(t) \\ x &= \varphi(t) \end{aligned}\right\}$. Тогда, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(\frac{dy}{dx})_t^{/}}{x_t^{/}}$.

Пример. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции *y*: $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \sin 2t \end{cases}$. Тогда, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\sin 2t)_t^{/}}{(\sin^2 t)_t^{/}} = \dfrac{2\cos 2t}{2\sin t\cos t} = 2ctg2t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2ctg2t)_t^{/}}{(\sin^2 t)_t^{/}} = \frac{-2\frac{2}{\sin^2 2t}}{2\sin t\cos t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}.$$