ЛЕКЦИЯ N2.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций. Замечательные пределы. Непрерывность функций.

1. Свойства бесконечно малых.

Теорема 1**:** Алгебраическая сумма любого числа бесконечно малых величин является величиной бесконечно малой.

Доказательство: Пусть дано k бесконечно малых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (k – определенное натуральное число). Зададимся произвольным $\varepsilon>0$. В процессе изменения бесконечно малых наступят такие моменты, что $|\alpha_1|<\frac{\varepsilon}{k}$; $|\alpha_2|<\frac{\varepsilon}{k}$; ...$|\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{k}$, и каждое из них будет справедливо в дальнейшем процессе изменения. Тогда в силу постоянства k непременно наступит такой момент, что неравенства $|\alpha_1|<\frac{\varepsilon}{k}$; $|\alpha_2|<\frac{\varepsilon}{k}$;... $|\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{k}$ выполнятся одновременно. Тогда, $|\alpha_1\pm\alpha_2\pm\alpha_3\pm\dots\pm\alpha_k|\le|\alpha_1|+|\alpha_2|+\dots+|\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{k}+\frac{\varepsilon}{k}+\dots=\frac{\varepsilon}{k}\cdot k=\varepsilon$, то есть $|\alpha_1\pm\alpha_2\pm\dots\pm\alpha_k|<\varepsilon$.

Из-за произвольности ε это означает, что алгебраическая сумма k бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

Теорема 2**:** Произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину есть величина бесконечно малая.

Доказательство: Пусть α - бесконечно малая, а u – ограниченная переменная величина. В процессе их общего изменения наступит такой момент, когда первая из них будет удовлетворять неравенству $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$, а вторая $|u|<M$, где ε - произвольное малое положительное число, а M – определенная положительная постоянная. Но тогда, начиная с этого момента, для произведения $u\cdot\alpha$ имеем оценку $|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Следствие:

1) Произведение двух бесконечно малых и произведение любого определенного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
2) Произведение бесконечно малой на любую постоянную величину и частное от деления бесконечно малой на любую, отличную от нуля постоянную, являются величинами бесконечно малыми.
3) Любая натуральная степень бесконечно малой величины есть бесконечно малая.

2.Признаки существования предела.

Теорема1: Всякая монотонно изменяющаяся и ограниченная в направлении своего изменения переменная величина имеет предел.
Теорема 2: Если числовые значения переменной величины v постоянно заключены между соответствующими числовыми значениями двух других переменных u и ω и эти последние стремятся к одному и тому же пределу a, то к этому же пределу a стремится и переменная v.
Итак, $u \le v \le \omega$ (*) и если $\lim u=a$, $\lim \omega=a$, то $\lim v=a$.
Доказательство: В процессе совместного изменения переменных u и ω наступает такой момент, когда обе они будут удовлетворять неравенствам: $|u-a|<\varepsilon$ и $|\omega-a|<\varepsilon$ (1)
Перепишем эти неравенства в виде: $-\varepsilon<u-a<\varepsilon$; $-\varepsilon<\omega-a<\varepsilon$ или $a-\varepsilon<u<a+\varepsilon$ (**);
$a-\varepsilon<\omega<a+\varepsilon$ (***). Объединим левую часть (**), неравенство (*) и правую часть (***) получим $a-\varepsilon<u\le v\le\omega<a+\varepsilon$.
Отсюда ясно, что наряду с неравенством (1) будет иметь место и $|v-a|<\varepsilon$, что и означает, что $\lim v=a$.

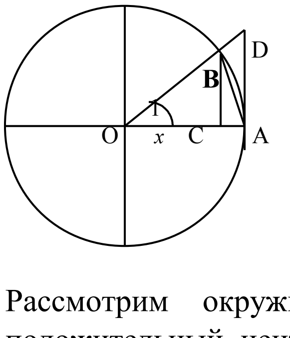
3.Свойства бесконечно больших.

1) Произведение бесконечно большой величины на величину, имеющую предел, отличный от нуля, а следовательно, и произведения бесконечно большой величины на постоянную, не равную нулю, являются величинами бесконечно большими.
2) Произведение любого определенного числа бесконечно больших величин есть также величина бесконечно большая.
3) Величина, обратная всякой бесконечно большой, есть бесконечно малая.
4) Величина, обратная бесконечно малой, будет бесконечно большой, если данная бесконечно малая в процессе своего изменения не принимает значений равных нулю.

4.Первый замечательный предел.

Если угол x выражен в радианах, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Ограничимся случаем, когда $x\to 0$, оставаясь положительным. Так как функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ четная, характер ее изменения при $x\to 0$, остающимся отрицательным, тот же самый.



Рассмотрим окружность радиуса $R=1$. Отложим от горизонтального диаметра положительный центральный угол x ($\angle AOB$). Построим линию синуса (CB) и линию тангенса (AD) $\angle AOB$.
$\sin x=CB/OB=CB/1=CB$

$tg\ x=DA/OA=DA/1=DA$.

Сравним площади треугольника OAB (S_1), сектора AOB (S_2) и треугольника AOD (S_3), запишем $S_1<S_2<S_3$,

Но $S_1=(OA\cdot CB)/2=(1/2)\cdot \sin x;\ S_2=(1/2)\cdot R^2x=(1/2)\cdot x;\ S_3=(OA\cdot AD)/2=(1/2)\cdot tg\ x$.

Тогда, $\sin x<x<tg\ x$, так как $\sin x>0$ и $x>0$, то при делении на $\sin x$ знак неравенства сохраняется, то есть: $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, откуда, $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$.

Но, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ и, по теореме о пределе переменной, заключенной между двумя другими, имеющими общий предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

5.Второй замечательный предел.

Установим, чему равен следующий предел: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

Сначала найдем предел бесконечной последовательности $\{y_n\}$, где $y_n=(1+\frac{1}{n})^n$ при $n\to\infty$.

Докажем, что эта последовательность $\{y_n\}$ – монотонно возрастающая и притом ограниченная сверху. Этим мы докажем, что последовательность $\{y_n\}$ имеет при $n\to\infty$ предел.

а) убедимся, что $y_{n+1}>y_n$ при всяком целом положительном n, то есть монотонно возрастает. По формуле Ньютона для бинома n-ой степени: $y_n=(1+\frac{1}{n})^n=$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(\frac{1}{n})^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(\frac{1}{n})^3+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}(\frac{1}{n})^n$$

Разделим каждый сомножитель числителя на n, получим $y_n=(1+\frac{1}{n})^n=$

$$1+1+\frac{1-1/n}{2}+\frac{(1-1/n)(1-2/n)}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(n-1)/n))}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

Увеличим в этой формуле n на единицу. Тогда получим выражение для y_{n+1}

$y_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=1+1+(1-1/(n+1))/2+((1-1/(n+1))(1-2/(n+1)))/(2\cdot 3)+\ldots$

$+((1-1/(n+1))(1-2/(n+1))\ldots(1-(n-1+1)/(n+1)))/(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1))+$

$((1-1/(n+1))(1-2/(n+1))\ldots(1-(n+1)/(n+1+1)))/(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2))$

Сравнивая равенства для y_n и y_{n+1}, видим, что в последнем есть дополнительное последнее слагаемое и каждый из остальных (начиная с третьего) членов правой части равенства для y_{n+1} больше соответствующего ему члена правой части равенства для y_n:

$1-\frac{k}{n+1}>1-\frac{k}{n}$ при любом $k<n$.

Поэтому и вся сумма в правой части y_{n+1} больше суммы в правой части y_n. Этим доказано, что $y_{n+1}>y_n$ и поэтому последовательность $\{y_n\}$ монотонно возрастающая.

Пользуясь равенством для y_n, нетрудно показать, что при всяком целом положительном n величина $y_n<3$.

Если все числители, начиная со второго, заменить единицами (отбросив вычитаемые), то числители увеличатся, начиная с третьего слагаемого. Если в знаменателях заменить все множители, начиная со второго двойками, то знаменатели уменьшатся. И в результате этих операций правая часть равенства y_n увеличится, и мы получим неравенство $y_n=(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$ – это убывающая геометрическая прогрессия $a=1;\ q=1/2$.

Ее сумма $S=\frac{a_1-a_{n-1}\cdot q}{1-q}=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$.

Тогда, $y_n=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=1+2-\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}$.

Поэтому, при всяком n имеем $y_n<3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$

Последовательность $\{y_n\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает. Следовательно, она имеет предел. Этот предел, впервые найденный в XVII столетии Непером, называется неперовым числом – e: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

Число e – иррациональное, e=2,718281828459045….

Можно показать, что к этому же пределу стремится и функция $y=(1+\frac{1}{z})^z$ при $z\to\infty$ и $\lim\limits_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^z=e$.

Положим, $z=\frac{1}{x}$. Поскольку величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой, то при $z\to\infty$ $x\to0$. Поэтому, $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

5.Непрерывность функции.

Свойства непрерывных на отрезке функций. Точки разрыва.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (включая и саму точку x_0), и если предел функции при стремлении аргумента x к x_0 существует и равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.Точка x_0 называется точкой непрерывности данной функции.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки, и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение самой функции.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ непрерывна в данной точке x_0, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции от предела аргумента $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ (то есть при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции).

Существует односторонняя непрерывность функции в точке x_0 справа или слева.

Определение 4. Функция $y=f(x)$ называется в точке $x=x_0$ непрерывной слева, если в этой точке у нее существует левый односторонний предел $f(x_0-0)$, и этот предел равен значению функции $f(x_0)$ в самой точке $x=x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

Аналогично определяется и правый односторонний предел: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

<u>Непрерывность функций в промежутке и на сегменте.</u>

Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в интервале (промежутке) (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$ (сегменте), если она непрерывна в промежутке (a, b) и, кроме того, непрерывна в точке $x=a$ справа и точке $x=b$ слева.

<u>Действия над непрерывными функциями.</u>

<u>Теорема.</u> Сумма, разность, произведение и частное от деления двух непрерывных функций являются также функциями непрерывными (для частного за исключением тех значений аргумента, которые обращают в нуль делитель).

Доказательство. Пусть $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, причем $\varphi(\lim\limits_{x\to x_0} x) \neq 0$.

Но $\lim\limits_{x\to x_0} y = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} = \frac{f(\lim\limits_{x\to x_0} x)}{\varphi(\lim\limits_{x\to x_0} x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$, что и требовалось доказать.

<u>Непрерывность сложной и обратной функций.</u>

<u>Теорема.</u> Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Нужно доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[(\varphi(x_0)]$. Так как $u=\varphi(x)$ непрерывна, то $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$. А вследствие непрерывности $f(u)$:

$\lim\limits_{x\to x_0} f[(\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(u) = f(\varphi_0) = f[\varphi(x_0)]$, что и требовалось доказать.

<u>Теорема.</u> Если прямая функция $y=f(x)$ монотонна и непрерывна в некотором промежутке (a, b) оси Ox и имеет своей областью значений промежуток (c, d) оси Oy, то обратная ей функция $y=\varphi(x)$ также монотонна и непрерывна в промежутке (c, d) оси Ox [или $x=\Psi(y)$ – в промежутке $[c, d]$ оси Oy].

<u>Непрерывность элементарных функций.</u>

1) Функция $y=C$ – const - непрерывна на всей числовой оси. Функция $y=x$ также непрерывна на всей числовой оси (во всей области ее определения).

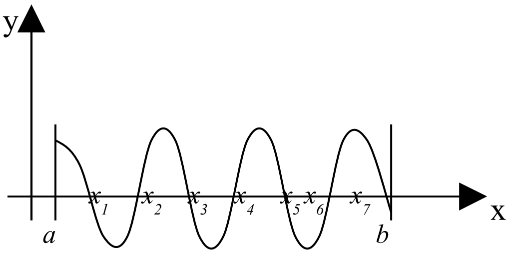
Поэтому, например, степенная функция $y=Cx^n$, где n- целое (больше нуля) непрерывна, как произведение непрерывных функций $Cx^n=C\cdot x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$ (n множителей).
Можно доказать, что вообще все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.

Из двух приведенных выше теорем следует, что и всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих области ее определения.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0).$$

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на этом сегменте своего наибольшего и наименьшего значений.
Теорема 2. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом сегменте.
Доказательство:
Пусть M – наибольшее значение $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, m – наименьшее значение $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда $m\le f(x)\le M$.
Пусть C – наибольшее из $|m|$ и $|M|$. Тогда $|f(x)|\le C$, что и означает ограниченность $y=f(x)$ на сегменте $[a, b]$.
Теорема 3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри сегмента найдется по меньшей мере одна точка, в которой $y=0$.



Теорема 4: о промежуточных значениях.
Если $y=f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется внутри сегмента такая точка c, что $f(c)=C$.
Теорема геометрически очевидна.

Теорема 5. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет здесь положительное (отрицательное) значения, то она останется положительной (отрицательной) во всех точках некоторой окрестности точки x_0.
Доказательство. Пусть $f(x_0)>0$, пусть есть $\varepsilon>0$, такое, что $f(x_0)-\varepsilon>0$. Но $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, а по определению $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, то есть $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$, но $f(x_0)-\varepsilon>0$, поэтому, и $f(x)>0$ для всех точек области определения.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на некотором сегменте $[a, b]$, если большему значению независимой переменной соответствует и большее значение функции, то есть если $x_2>x_1$, то $f(x_2)>f(x_1)$, и - убывающей, если $x_2>x_1$, а $f(x_2)<f(x_1)$.

6.Точки разрыва функции.

Точками разрыва функции называют:
а) принадлежащие области определения функции точки, в которых функция теряет свойство непрерывности;
б) не принадлежащие области определения функции точки, но такие, что в любой их окрестности имеются точки из области определения функции (например, точка $x=b$, если промежутки (a, b) и (b, c) принадлежат области определения функции, а сама точка b не принадлежит области определения функции).
Говорят, что функция $y=f(x)$ разрывна в точке x_0, если

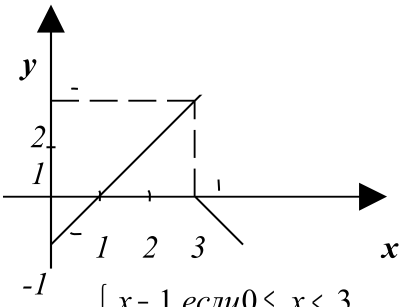
1) в точке x_0 функция не определена;
2) не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Классификация точек разрыва.

1) Точки разрыва называются точками разрыва первого рода, если существуют и конечны оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) u \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но нарушено равенство $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.
2) Точки разрыва второго рода – это точки, в которых не существует (или равен ∞) хотя бы один из односторонних пределов.

Разрыв 1 рода.

1 случай: $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$.
Разность $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода, а сам разрыв – разрывом со скачком.



$$f(x)=\begin{cases} x-1, если 0 \le x < 3 \\ 3-x, если 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 3+0} f(x) = 0$$

Если $f(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то это правильный разрыв первого рода.

2 случай. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, а двойное равенство нарушается либо из-за того, что функция $y=f(x)$ не определена в точке $x=x_0$, либо ее значение в точке x_0 отлично от общего значения обоих односторонних пределов.

Это устранимый разрыв первого рода.
Его можно устранить, либо доопределив функцию в точке $x=x_0$, либо изменив ее область определения, положив $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$.
Пример.

$\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$.

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to x_0-0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Если доопределить $f(0)=1$, то разрыв устраняется.

Разрыв второго рода.

Если предел не существует или если оба односторонних предела, или один бесконечны, то это разрыв называется разрывом второго рода. Если один предел конечен, а другой бесконечен, или оба бесконечны, то это разрыв с бесконечным скачком.