ЛЕКЦИЯ N50.
Дивергенция векторного поля. Циркуляция. Ротор. Потенциальные, соленоидальные, гармонические поля. Операторы Лапласа и Гамильтона.

1.Дивергенция векторного поля.

Пусть в области $T \subset R_3$ определено непрерывно дифференцируемое поле

$$\boldsymbol{a}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

Определение. Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля $\boldsymbol{a}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$ называется скалярное поле точки M, обозначаемое $div\ \boldsymbol{a}(M)$ и определяемое так: $div\ \boldsymbol{a}(M)=P_x^{/}(x, y, z)+Q_y^{/}(x, y, z)+R_z^{/}(x, y, z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ (1), где частные производные вычислены в точке M.

Запишем формулу Осроградского в виде $\iiint\limits_T div a dv = \iint\limits_\Pi a_n d\sigma$.

В силу теоремы о среднем значении, имеем $\iiint\limits_T div a dv = div a(M_1)\cdot V$ или $div\boldsymbol{a}(M_1)=\frac{1}{V}\iint\limits_\Pi a_n d\sigma$, где $M_1 \in T$, а V – объем тела T.

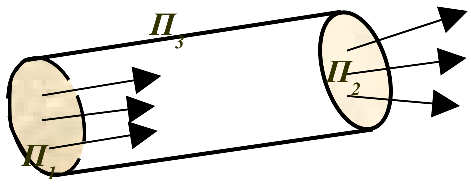
Устремляя диаметр d тела T к нулю (тогда $M_1 \to M$), и используя непрерывность функции $div\ \boldsymbol{a}(M_1)$ в точке M_1, заключаем, что существует предел $div\ \boldsymbol{a}(M)=\lim\limits_{d\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_\Pi a_n d\sigma$ (2).

Определение. ***Дивергенцией*** векторного поля в точке M называется предел отношения потока поля через малую замкнутую поверхность, окружающую точку M, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при стремлении диаметра к нулю.

2.Соленоидальные поля.

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется соленоидальным (трубчатым) в области T, если его дивергенция равна нулю в каждой точке области, то есть $div\ \boldsymbol{a}=0$.

Для соленоидального поля имеем $\iint\limits_\Pi a_n d\sigma = 0$ (3), где Π – любая замкнутая поверхность, внутри которой поле везде существует. Рассмотрим векторную трубку между двумя произвольными ее сечением Π_1 и Π_2. Поверхность трубки обозначим через Π_3. Имеем по формуле (3): $\iint\limits_{\Pi_1} a_n d\sigma + \iint\limits_{\Pi_2} a_n d\sigma + \iint\limits_{\Pi_3} a_n d\sigma = 0$, причем во всех случаях берется внешняя нормаль.



На поверхности $П_3$:a_n=0, так как a_n лежит в касательной плоскости к этой поверхности.

Если для сечения $П_1$ взять направление внутренней нормали, а для сечения $П_2$ – внешней, то придем к $\iint\limits_{П_1} a_n d\sigma = \iint\limits_{П_2} a_n d\sigma$, то есть поток соленоидального поля через поперечные сечения векторной трубки имеет одно и то же значение. Оно называется ***интенсивностью*** (или напряжением) векторной трубки.

Физическая интерпретации соленоидального поля такова: при отсутствии источников ($div\ \boldsymbol{a}$=0) расход жидкости через поперечное сечение векторной трубки имеет одно и то же значение для всех сечений этой трубки.

3.Циркуляция.

Пусть Λ пространственная кусочно-гладкая линия и пусть $\boldsymbol{a}(M)$ – непрерывное векторное поле, заданное в $\Lambda \subset T \subset R_3$. Обозначим проекции вектора $\boldsymbol{a}(M)$ на координатные оси: $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$.

Определение. Криволинейный интеграл вида $\int\limits_{\Lambda} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, взятый по направленной линии Λ называется ***линейным интегралом*** от вектора $\boldsymbol{a}$ вдоль линии Λ.

Определение. ***Циркуляцией*** векторного поля $\boldsymbol{a}=(P, Q, R)$ по замкнутой линии Λ в области $T \subset R_3$: называется линейный интеграл по этой замкнутой линии Λ, $Ц=\oint\limits_{\Lambda} adr$, где

$\boldsymbol{dr}=(dx, dy, dz)$ – вектор-дифференциал. Таким образом, $\int\limits_{\Lambda} adr = \int\limits_{\Lambda} np_{\tau}\, adl$, где $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный касательный вектор, dl – элемент дуги Λ, $np_{\tau}\boldsymbol{a}$ – проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на касательную $\boldsymbol{\tau}$.

4.Формула Стокса.

Определение. ***Ротором*** (или вихрем) векторного поля $\boldsymbol{a}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$ называется векторное поле точки M, обозначаемое $\boldsymbol{rot\ a}(M)$:

$\boldsymbol{rot\ a}(M)=(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})i + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})j + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})k$, где частные производные вычислены в точке M.

Запишем символический определитель: $\boldsymbol{rot\ a}(M)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

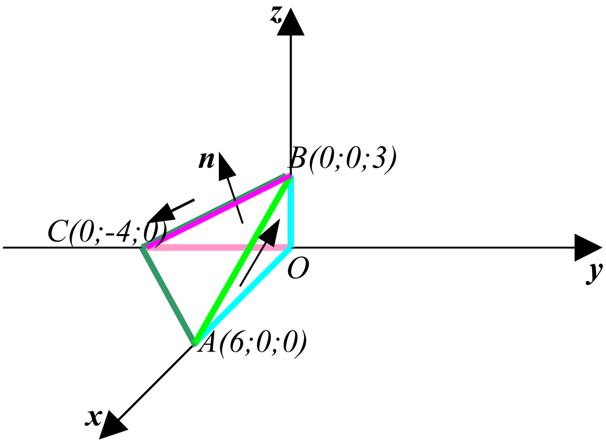
<u>Теорема.</u> Если P, Q, R и их частные производные непрерывны на поверхности $П$, ограниченной замкнутым контуром L, то

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_П [(\frac{\partial R}{dy} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma\,]dS\,.$$

Возвращаясь к формуле Стокса, видим, что в правой ее части стоит поток вектора ***rot a****(M)* через поверхность *S*: $\iint_П nrotad\sigma$, тогда предыдущую формулу можно переписать так:

$\oint_\Lambda adr = \iint_П nrotad\sigma$, где ***a****=(P, Q, R)* и *P, Q, R* – непрерывно дифференцируемые функции на *П*, то есть поток вектора ***rot a*** через ориентированную поверхность *П* равен циркуляции вектора ***a*** вдоль положительного направления обхода контура *Λ* этой поверхности.

Пример. Вычислить циркуляцию векторного поля ***a****(x, y, z)=xy****i****+yz****j****+xz****k*** вдоль линии пересечения плоскости *2x-3y+4z-12=0* с координатными плоскостями.



Решение. Рассмотрим верхнюю сторону плоскости *П,* а также соответствующее этой стороне направление обхода замкнутой линии *ABCA*. Итак, $P=xy,\ Q=yz,\ R=xz,\ R_y^/=0,\ Q_z^/=y,\ P_z^/=0,\ R_x^/=z,\ Q_x^/=0,\ P_y^/=x.$

$Ц=\int_\Lambda xydx + yxdy + xzdz = -\iint_П ydydz + zdzdx + xdydx$

Выразим интеграл по поверхности *П* через двойной интеграл по фигурам, являющимся проекциями *П* на координатные плоскости: $Ц=-\iint_{\Delta BCO} ydydz - \iint_{\Delta BAO} - zdzdx - \iint_{\Delta AOC} xdxdy$ =8+ 9 -24=-7.

Замечание. ***Физический смысл ротора***: ротор или скорость ***v*** представляет собой мгновенную угловую скорость вращения твердого тела.

5.Необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Пусть в области *T* определены непрерывно-дифференцируемые функции *P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z).*

Рассмотрим линейный интеграл $\int_\Lambda Pdx + Qdy + Rdz$ (*), взятый по некоторой линии $\Lambda \in T$.

Заменим по формуле Стокса криволинейный интеграл поверхностным

$$\int_П (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx \qquad (1).$$

Для обращения интеграла в нуль достаточно, чтобы $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}; \frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}$ (2).

Это необходимое условие обращения в нуль интеграла (1). Покажем, что условия (2) будут необходимыми и достаточными для того, чтобы интеграл (*) не зависел от пути интегрирования, а зависел от начальной и конечной точки пути.

Необходимость. Пусть интеграл (*) не зависит от пути интегрирования. Возьмем в T произвольную замкнутую линию Λ и разобьем ее на части ACB и ADB точками A и B.

Тогда $\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy + Rdz$, то $\int\limits_{\Lambda} = \int\limits_{ACB} + \int\limits_{BDA} = \int\limits_{ACB} - \int\limits_{ADB} = 0$.

Достаточность. Пусть выполнены условия (2). Тогда интеграл (*) обращается в нуль вдоль простой замкнутой линии Λ и, значит, $\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy + Rdz$ при условии, что линии ACB и ADB не имеют общих точек, кроме A и B.

Если это не так, то можно выбрать третью линию AEB, которая не пересекается ни с одной из прямых. Тогда, $\int\limits_{ACB} = \int\limits_{AEB}, \int\limits_{ADB} = \int\limits_{AEB}$. А отсюда, и следует независимость.

6.Потенциальное поле.

Определение. Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$ называется потенциальным (или безвихревым) в области $T\subset R_3$, если его ротор равен нулю в каждой точке этой области. Если $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}=0$ для каждой точки поля, то $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (3).

Поэтому (3) – условия потенциальности векторного поля.

Определение. Скалярное поле $U(x, y, z)$, градиент которого порождает потенциальное поле $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ называется потенциалом этого векторного поля.

Потенциальное поле характеризуется соотношением

$\boldsymbol{a}(x, y, z)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}=u_x'\boldsymbol{i}+u_y'\boldsymbol{j}+u_z'\boldsymbol{k}=\mathbf{grad}\ U.$

Правило вычисления: $U(x, y, z) =$

$$\int\limits_A^B Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz$$

Пример. Показать, что поле $\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$ является потенциальным. Найти его потенциал.

Решение. Найдем $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}=(-2x+(-2x))\boldsymbol{i}-(-2y-(-2y))\boldsymbol{j}+(-2z+2z)\boldsymbol{k}=0$ – поле потенциально.

Потенциал: $U(x, y, z) =$

$$\int\limits_{x_0}^{x} (x^2 - 2y_0 z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} (y^2 - 2xz_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} (z^2 - 2xy)dz = (\frac{1}{3}x^3 - 2xy_0 z_0)\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ (\frac{1}{3}y^3 - 2xyz_0)\Big|_{y_0}^{y} + (\frac{1}{3}z^3 - 2xyz)\Big|_{z_0}^{z} = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C_0$$

где $C_0=-\frac{1}{3}x_0^3 - \frac{1}{3}y_0^3 - \frac{1}{3}z_0^3 + 2x_0 y_0 z_0$.

Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле.

Если область T является поверхностно-односвязной, то линейный интеграл в потенциальном поле не зависит от пути интегрирования, а зависит только от координат начальной и конечной точек A и B этого пути, и равен приращению потенциальной функции $U(x, y, z)$ в этих точках: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A)$.

Здесь AB – произвольный путь интегрирования от точки $A(x_A, y_A, z_A)$ до точки $B(x_B, y_B, z_B)$. Обычно в качестве такого пути берется ломаная $ACDB$, звенья которой AC, CD, DB параллельны осям координат. В этом случае формула для вычисления потенциала

$U(x, y, z)=\int\limits_A^B Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0) + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz$, где

$\boldsymbol{AC}(x-x_0, 0, 0)$, $\boldsymbol{CD}(0, y-y_0, 0)$, $\boldsymbol{DB}(0, 0, z-z_0)$.

Пример. Найти ротор векторного поля $\boldsymbol{a}(x, y, z)=z^2\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+y^2\boldsymbol{k}$.

Решение. $rot_x a=$

$$\frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2y; rot_y a = \frac{\partial(z^2)}{\partial z} - \frac{\partial(y^2)}{\partial x} = 2z; rot_z a = 2x; rot a = 2yi + 2zj + 2xk$$

Пример. Проверим, зависит ли криволинейный интеграл от пути интегрирования $\int\limits_L (2xy + z^2)dx + (x^2 + z)dy + (y + 2xz)dz$. Решение: не зависит от пути интегрирования, так как для него выполняются условия теоремы $\boldsymbol{rot\ \Phi}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & x^2 + z & y + 2xz \end{vmatrix}=0$.

Пример. $\int\limits_L ydx - xdy + zdz$ - проверить зависимость от пути интегрирования.

$\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{rot\ a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = -2k \neq 0$ - интеграл зависит от пути интегрирования.

Пример. Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}(M)=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$ по границе $ABCA$ треугольника с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

$\boldsymbol{rot\ a}(M)=-2z\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}-2y\boldsymbol{k}$

$$\int\limits_{ABCA} a(M)dr = \iint\limits_{\Pi_1} -2zdydz - 2\iint\limits_{\Pi_2} xdzdx - 2\iint\limits_{\Pi_3} ydxdy = -2\int\limits_0^1 dy\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-y} - 2\int\limits_0^1 dz\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1-z} - 2\int\limits_0^1 dx\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-2y+y^2)dy - 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-2x+x^2)dx - 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-2z+z^2)dz = -2\frac{1}{2}[y - y^2 + \frac{y^3}{3} + x - x^2 +$$

$$+\frac{x^3}{3} + z - z^2 + \frac{z^3}{3}]\Big|_0^1 = -2\frac{1}{2}(1 - 1 + \frac{1}{3} + 1 - 1 + \frac{1}{3} + 1 - 1 + \frac{1}{3}] = -2(+\frac{1}{2}) = -1$$

Пример. Найти $I=\oint x^2y^3dx + dy + zdz$, применяя формулу Стокса, если C – окружность $x^2+y^2=r^2$; $z=0$.

Решение.

$$I = -\iint\limits_{\Pi} 3x^2y^2\cos\gamma d\sigma = -3\iint\limits_D x^2y^2dxdy = -3\iint\limits_D \rho^5\sin^2\theta\cos^2\theta d\rho d\theta = -3\cdot 4\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta\int\limits_0^r \rho^5 d\rho =$$

$$= -2r^6\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta d\theta = -\frac{\pi r^6}{8}$$

7.Лапласово или гармоническое поле.

Векторное поле называется лапласовым (или гармоническим), если оно одновременно и потенциальное, и соленоидальное, то есть, если ***rot a***$=0$ и *div* ***a***$=0$.

Пример. Доказать, что потенциал U двумерного или трехмерного лапласова поля является гармонической функцией двух или трех переменных (то есть $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ или $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$).

Решение. Действительно, имеем $div\, \mathbf{a}=div\, gradU=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ для двух переменных, $div\, \mathbf{a}=div\, \mathbf{grad}\, U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$ для трех переменных.

Пример. Показать, что потенциал поля сил тяготения, возникающего в пространстве, окружающем векторную точечную массу, равен k/r ($k>0$ – коэффициент пропорциональности), и что поле сил тяготения лапласово.

Решение. Поместим начало координат в центре притяжения. Тогда

$\mathbf{a}=\mathbf{grad}\frac{k}{r}=kgrad\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-k\frac{xi+yj+zk}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{kr}{r^3}$. Но это – вектор силы притяжения. Действительно, он направлен к центру притяжения, поскольку – ***r****/r* – единичный вектор радиус-вектора точки P(r), направленный к началу координат, а его модуль равен k/r^2, то есть обратно пропорционален квадрату расстояния от центра притяжения. Покажем, что $div\mathbf{a}=-kdiv\frac{r}{r^3}=0$. Имеем

$$a_x=-\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial a_x}{\partial x}=-k\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=-k\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}.$$

Аналогично, $\frac{\partial a_y}{\partial y}=-k\frac{x^2+z^2-2y^2}{r^5}, \frac{\partial a_z}{\partial z}=-k\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5}$, и потому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=-\frac{k}{r^5}((y^2+z^2-2x^2)+(x^2+z^2-2y^2)+(x^2+y^2-2z^2))\equiv 0$$

Итак, поле сил тяготения лапласово.

8.Оператор Гамильтона.

Градиент функции $u(x, y, z)$ часто обозначают буквой ∇ («набла») и записывают следующим образом: $\nabla u=i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z}$ (1).

Равенство (1) можно символически записать в виде $\nabla u=(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z})u$ (2).

Определение. Символ $\nabla=(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z})$ (3) называется ***символическим вектором*** (или ***оператором Гамильтона***, или ***набла-оператором***). Из формул (1) и (2) следует, что градиент функции есть «произведение» символического вектора ∇ на скалярную функцию u, то есть $\nabla u=grad\, u$.

Составим скалярное и векторное произведения символического вектора ∇ на вектор $\mathbf{a}=\mathbf{i}P+\mathbf{j}Q+\mathbf{k}R$. В первом случае получим

$$\nabla a=(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z})(iP+jQ+kR)=\frac{\partial}{\partial x}P+\frac{\partial}{\partial y}Q+\frac{\partial}{\partial z}R=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=diva.$$

Следовательно, $\nabla\boldsymbol{a}=div\ \boldsymbol{a}$ (4), то есть дивергенция вектора ***a*** равна скалярному произведению символического вектора ∇ на вектор ***a***.

Во втором случае имеем $\nabla\times a=(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z})\times(iP+jQ+kR)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=$

$$=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})i+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})j+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})k.$$

Следовательно, $\nabla\times a=rot\ a$ (5), то есть ротор вектора ***a*** равен векторному произведению символического вектора ∇ на вектор ***a***.

9.Оператор Лапласа.

Операции второго порядка в векторном анализе.Оператор Лапласа.

Пусть в области $T\subset R_3$ заданы скалярное поле *u(M)* и векторное поле ***a****(M)*. Операции ***grad*** *u,* *div* ***a****,* ***rot a*** называются операциями первого порядка. Первая и третья операции порождают векторное поле, а вторая – скалярное поле.

Возможны следующие операции: ***rot grad*** *u, div* ***grad*** *u,* ***grad*** *div* ***a****, div* ***rot a****,* ***rot rot a*,** которые называются операциями второго порядка. При этом справедливы соотношения: ***rot*** *grad u=0, div* ***rot a****=0* (6).

В самом деле, на основании формул (2) и (3), получим:

$$\textbf{\textit{rot grad}}\ u=(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y})i+(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z})j+(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x})k=0.$$

В справедливости второго из соотношений (6) можно также убедиться.

Определение. Операция второго порядка *div* ***grad*** *u* называется ***оператором Лапласа*** и обозначается через Δ (не путать с обозначением приращения), то есть $\Delta u=div\ \mathbf{grad}\ u$.

Легко проверить, что операции второго порядка ***grad*** *div* ***a*** и ***rot rot a*** удовлетворяют соотношению ***rot rot a****=****grad*** *div* ***a****-Δ****a*** (7), где $\Delta\boldsymbol{a}=\Delta P\boldsymbol{i}+\Delta Q\boldsymbol{j}+\Delta R\boldsymbol{k}$.

Выражение оператора Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Найдем выражение оператора Лапласа в декартовых координатах. Имеем

$$div\ \mathbf{grad}\ u=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial u}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Итак, $\Delta u=u_{xx}^{//}+u_{yy}^{//}+u_{zz}^{//}$ (8).

Используя формулу (8), можно найти выражения оператора Лапласа в цилиндрических координатах $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ и в сферических координатах $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $r=r\cos\theta$.

Приведем окончательные формулы для этих выражений:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (9);$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{ctg\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} \quad (10).$$