ЛЕКЦИЯ N44.
Вычисление кратных интегралов.

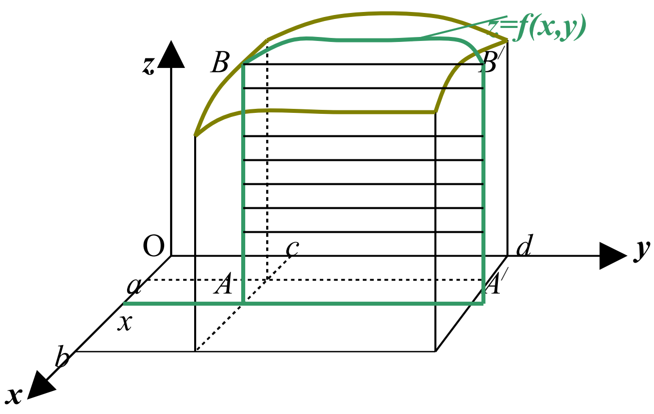
1.Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах.

Разобьем плоскую область интегрирования D, отнесенную к системе декартовых координат Oxy, на частичные области посредством двух систем координатных линий: x=const, y=const ($x=x_0$, $x_1, \ldots, x_n$; $y=y_0$, $y_1, \ldots, y_n$). Этими линиями служат прямые, параллельные соответственно оси Oy и оси Ox, а частичными областями – прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат. Ясно, что площадь частичной области $\Delta\sigma=\Delta x\Delta y$, и для элемента площади $d\sigma$ имеем выражение $d\sigma=dxdy$, то есть дифференциал площади в прямоугольных декартовых координатах равен произведению дифференциалов независимых переменных. $I=\int\int_D f(P)d\sigma = \int\int_D f(x,y)dxdy$.

Будем опираться на тот факт, что всякий двойной интеграл $I=\int\int_D f(P)dxdy$ можно интерпретировать как алгебраический «объем» цилиндрического тела с основанием D, ограниченного поверхностью $z=f(P)=f(x,y)$.

Предположим, что область интегрирования есть прямоугольник D со сторонами, параллельными осям координат $a\le x\le b$; $c\le y\le d$.

Возьмем соответствующее цилиндрическое тело:



Проведем плоскость, параллельную плоскости Oyz, на произвольном от нее расстоянии x=const ($a\le x\le b$). Эта плоскость рассечет цилиндр по криволинейной трапеции $ABB'A'$, ограниченной плоской линией L: $z=f(x, y)$; x=const.

Площадь трапеции $ABB'A'$ выразится интегралом от высоты линии L, взятым по основанию трапеции ($c\le y\le d$), то есть $\int_c^d f(x,y)dy$.

Здесь интегрирование производится по y, а x – второй аргумент подынтегральной функции – рассматривается при этом как постоянный.

Величина этого интеграла зависит от взятого значения x, то есть интеграл является функцией от x; обозначим ее через $F(x)$: $F(x)=\int_c^d f(x,y)dy$.Объем рассматриваемого тела находится интегрированием выражения *F(x)* для площади плоского сечения в интервале изменения x $(a \le x \le b)$ $I=\int_a^b F(x)dx$. Итак, $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx$

Заменяя *F(x)* его выражением, получим $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$.

С другой стороны, «объем» можно определить также и по площадям плоских сечений $ABB'A'$, параллельных плоскости Oxz (а не Oyz). Тогда, площадь сечения плоскостью y=const выразится интегралом $\Phi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$, а весь объем – интегралом от $\Phi(y)$, распространенным по интервалу изменения y $(c \le y \le d)$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \Phi(y)dy$$

Аналогично, $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$, или $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

Правило вычисления двойного интеграла.

Для того, чтобы вычислить двойной интеграл по прямоугольнику D, нужно проинтегрировать функцию по одной переменной, в пределах ее изменения, а затем от результата взять интеграл по другой переменной, в пределах ее изменения.

Определение. Выражения, стоящие в правых частях формул (1) и (2), каждое из которых содержит две последовательные операции обыкновенного интегрирования над функцией *f(x, y),* называются двукратными интегралами от функции *f(x, y)* в области D $(a \le x \le b, c \le y \le d)$.

Причем, двукратный интеграл с постоянными пределами от непрерывной функции не зависит от порядка интегрирования.

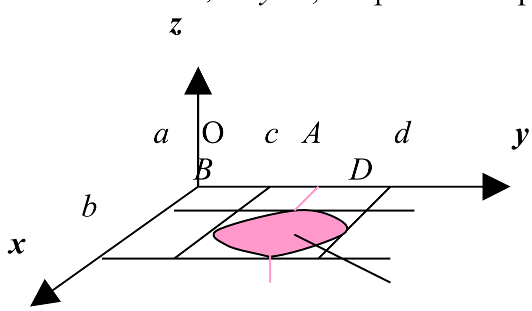
Пример. $z=1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}$ в прямоугольной области D: $-1 \le x \le 1$; $-2 \le y \le 2$:

$$I = \iint_D (1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})dxdy = \int_{-2}^{2} dy\int_{-1}^{1}(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})dx = \int_{-2}^{2} dy[x-\frac{x^2}{6}-\frac{yx}{4}]\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \int_{-2}^{2} dy[1-\frac{1}{6}-\frac{y}{4}+1+\frac{1}{6}-\frac{y}{4}] = \int_{-2}^{2}(2-\frac{y}{2})dy = 2y\Big|_{-2}^{2} - \frac{y^2}{4}\Big|_{-2}^{2} = 4+4-1+\frac{4}{4} = 8$$

2.Вычисление двойного интеграла (произвольная область).

Пусть теперь облатсью интегрирования является произвольная конечная область плоскости. Допустим, что область интегрирования удовлетворяет следующему условию: любая прямая, параллельная оси Ox или оси Oy, пересекает границу области не более, чем в двух точках. Обозначим такую область $\overline{D}$. Область $\overline{D}$ заключим внутрь некоторого прямоугольника $a \le x \le b$; $c \le y \le d$, стороны которого касаются границы области в точках *A, B, C, D*.

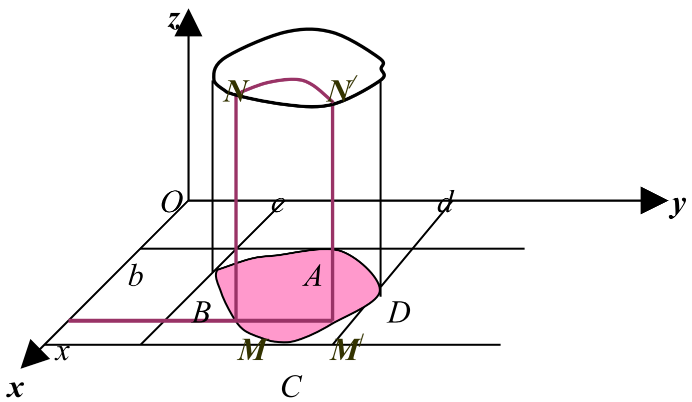


Отрезок $[a, b]$ – ортогональная проекция области $\overline{D}$ на ось Ox, а $[c, d]$ – на ось Oy.

Точками A и C граница разбивается на две линии: ABC и ADC, каждая из которых пересекается с любой прямой, параллельной оси Oy, не более чем в одной точке. Поэтому их уравнения можно записать в разрешенной относительно y форме: $y=\varphi_1(x)$ (ABC); $y=\varphi_2(x)$ (ADC), где φ_1 и φ_2 – однозначные функции x в $[a, b]$.

Аналогично, точками B и D граница разбивается на линии BAD и BCD, уравнения которых можно записать так: $x=\psi_1(y)$ (BAD); $x=\psi_2(y)$ (BCD), где ψ_1 и ψ_2 – однозначные функции y в $[c, d]$.

Рассечем тело произвольной плоскостью, параллельной плоскости Oyz, то есть x=const, $a \le x \le b$.



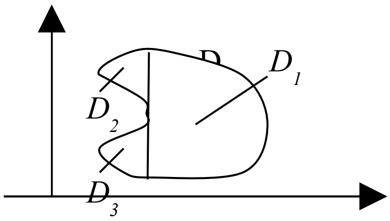
В сечении получим криволинейную трапецию $MNN^/M^/$, площадь которой выражается обыкновенным интегралом от функции $f(x, y)$, рассматриваемой как функция одной переменной y, причем y изменяется от ординаты точки M до ординаты точки $M^/$. M есть точка «входа» прямой x=const в области $\overline{D}$, а $M^/$ - точка «выхода» ее из этой области. Так как уравнение линий ABC есть $\varphi_1(x)$, а линии ADC – $y=\varphi_2(x)$, то эти ординаты при взятом x соответственно равны $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Следовательно, интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ дает выражение для площади плоского сечения $MNN^/M^/$ через расстояние x секущей плоскости от параллельной ей плоскости Oyz. Далее, аналогично, весь объем равен $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Внутренний интеграл (по y) имеет уже не постоянные, а переменные пределы, но смысл их тот же. Они указывают границы изменения переменной интеграции (y) при постоянном значении второго аргумента (x). Пределы внешнего интеграла (по x) постоянны; они указывают границы, в которых может изменяться второй аргумент функции (x).

Меняя роли x, y, получаем, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

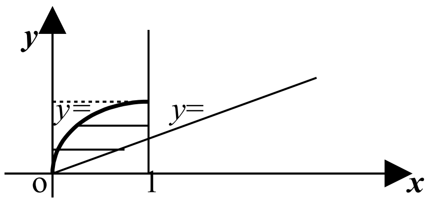
Правило. Для того, чтобы вычислить двойной интеграл, по области $\overline{D}$, нужно проинтегрировать функцию по одной переменной, в пределах ее изменения при постоянном, но произвольном значении другой переменной, а затем от результата взять интеграл по этой второй переменной, в пределах ее наибольшего изменения в области интеграции.

Наконец, предположим, что областью интегрирования служит произвольная конечная область плоскости. Такую область можно разбить на ряд областей вида $\overline{D}$.



Тогда, двойной интеграл, взятый по этой области, можно разбить на сумму двойных интегралов по составным областям.

Пример. $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2}dxdy$, если D ограничена линиями $y=\frac{1}{3}x; y=\sqrt{x}; x=1$.



$$\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{x^2}dy=\int_0^1\frac{1}{x^2}dx\left(\frac{y^4}{4}\Big|_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{x^2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4\cdot 9\cdot 9}\right)=\int_0^1\frac{1}{4}dx-\frac{1}{9x}\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{4}x\Big|_0^1-\frac{x^3}{3\cdot 9\cdot 36}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{9\cdot 72}=\frac{242}{972}$$

3.Тройной интеграл.

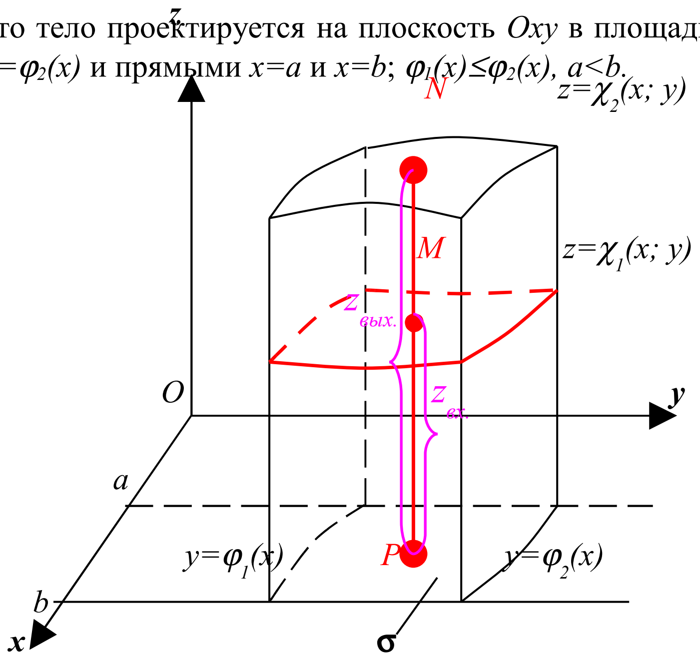
Вычисление тройного интеграла тоже может быть осуществлено посредством ряда однократных интегрирований.

Пусть дан тройной интеграл от функции *f(P),* распространенный на некоторую конечную область *Ω* пространства: $I=\iiint\limits_{\Omega} f(P)dv$, причем *Ω* отнесена к системе декартовых координат *Oxyz.* Разобьем область интеграции *Ω* плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Тогда частичными областями будут параллелепипеды с гранями, параллельными плоскостям *Oxy, Oxz* и *Oyz*, и элемент объема в области *Ω* будет равен произведению дифференциалов переменных интегрирования: *dv=dxdydz*. Поэтому, будем писать:

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz.$$

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов. Предположим, что областью интегрирования *V* является тело, ограниченное снизу поверхностью $z=\chi_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $z=\chi_2(x, y)$. Пусть это тело проектируется на плоскость Oxy в площадку σ, ограниченную кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$; $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $a<b$.



Проведем через точку $P(x, y, 0)$ площадки σ прямую, параллельную оси Oz. Эта прямая встретит нижнюю поверхность $z=\chi_1(x, y)$ в некоторой точке M и верхнюю поверхность $z=\chi_2(x, y)$ в некоторой точке N.

Тогда, M – точка входа, N – выхода. Тогда, интеграл считается так

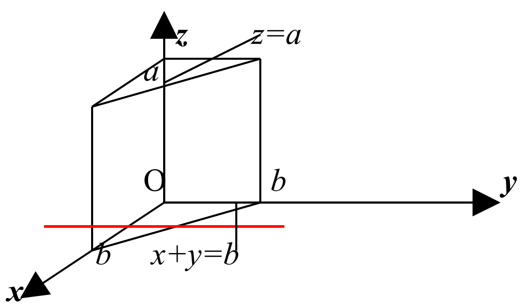
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_\sigma dxdy \int\limits_{z_{bx}=\chi_1(x,y)}^{z_{вых}=\chi_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Определение. Выражение в правой части равенства (3) называется трехкратным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области Ω.

Правило вычисления. Для того, чтобы вычислить тройной интеграл по области Ω, нужно:

1) проинтегрировать функцию по одной переменной в пределах ее изменения при постоянных, но произвольных значениях двух других переменных.
2) Результат первой интеграции проинтегрировать по второй переменной, в пределах ее изменения при постоянном, но произвольном значении третьей переменной, при этом областью интегрирования служит плоская область, являющаяся проекцией данной области Ω на плоскость второй и третьей переменных.
3) Наконец, от результата взять интеграл по последней – третьей – переменной в пределах ее наибольшего изменения в указанной плоской области.

Пример. $\iiint\limits_T (2x+3y-z)dxdydz$, если область T – трехгранная призма, ограниченная плоскостями $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$ $(a>0,\ b>0)$; $0\le z\le a$; $0\le x\le b$; $0\le y\le b-x$



$$I=\int_0^b dx\int_0^{b-x} dy\int_0^a (2x+3y-z)\,dz=\int_0^b dx\int_0^{b-x}\left(2xz+3yz-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^a dy=\int_0^b dx\int_0^{b-x}\left(2xa+3ya-\frac{a^2}{2}\right)dy=$$

$$=\int_0^b dx\left(2xay+\frac{3ay^2}{2}-\frac{a^2y}{2}\right)\Big|_0^{b-x}=\int_0^b\left(2xa(b-x)+\frac{3a(b-x)^2}{2}-\frac{a^2(b-x)}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^b\left(2abx-2ax^2+\frac{3ab^2}{2}-3abx+\frac{3ax^2}{2}-\frac{a^2b}{2}+\frac{a^2x}{2}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{abx^2}{2}+\frac{3ab^2x}{2}-\frac{a^2bx}{2}-\frac{ax^3}{6}+\frac{a^2x^2}{4}\right)\Big|_0^b=\frac{5ab^3}{6}-\frac{a^2b^2}{4}.$$

Замечание. Если областью интегрирования Ω служит внутренность параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, то пределы всех трех интегралов постоянны и сохраняются при перемене порядка интегрирования $I=$ $\iiint\limits_{\Omega} f(P)dxdydz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_k^l f(P)dz=\int_c^d dy\int_a^b dx\int_k^l f(P)dz$

Замечание. Тройной интеграл от единицы, взятый по некоторой области Ω пространства $I=\iiint\limits_{\Omega} dV=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ численно равен объему V области Ω. В самом деле, $I=\lim$ $\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i=\lim V=V$.

Таким образом, объем всякой пространственной области (тела) можно выразить одним тройным интегралом.