

ЛЕКЦИЯ N19.

Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность.

1. Основные определения и обозначения.....	1
2. Понятие функции нескольких переменных.....	2
3. Предел функции нескольких переменных.....	3
4. Непрерывность функции нескольких переменных.....	4

Функции одной переменной не охватывают всех зависимостей, существующих в природе. Так, например, объем v прямоугольного параллелепипеда, ребра которого имеют длины x, y, z соответственно, выражается формулой $v = xyz$, где x, y, z могут принимать любые положительные значения. В этом примере имеем четыре переменных величины, причем значение v вполне определяется заданием трех остальных переменных x, y, z . Для изучения таких и подобных им зависимостей вводится понятие функции нескольких переменных.

1. Основные определения и обозначения.

Пусть E_n – n -мерное евклидово пространство. Расстояние между двумя любыми точками $M'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$ из E_n обозначается символом $\rho(M', M'')$ и определяется

формулой
$$\rho(M', M'') = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k'' - x_k')^2}$$

При $n=1$ получаем $\rho(M', M'') = |x_1'' - x_1'|$ – расстояние между точками $M'(x_1')$ и $M''(x_1'')$ прямой ($E_1 \equiv E$); при $n=2$ имеем $\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2}$ – расстояние между точками $M'(x_1', x_2')$ и $M''(x_1'', x_2'')$ плоскости (E_2).

Определение. Пусть точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E_n$ и пусть $\varepsilon > 0$ – действительное число. Совокупность всех точек $M \in E_n$ таких, что $\rho(M, M_0) < \varepsilon$, называется n -мерным (открытым) шаром с центром в точке M_0 и радиусом ε , или шаровой ε -окрестностью точки $M_0 \in E_n$.

В случае $n=2$ имеем $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2$.

Это внутренность круга с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ радиуса ε (круг без ограничивающей его окружности). Для $n=3$ имеем $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < \varepsilon^2$.

Это шар радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (шар без ограничивающей его сферы).

Наряду с шаровыми окрестностями рассматривают *прямоугольные окрестности* точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Это совокупность всех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ таких, что $x_i^0 - \varepsilon_i < x_i < x_i^0 + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

В случае $n=1$ имеем обычную ε -окрестность $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ точки x_0 на числовой прямой. При $n=2$ это прямоугольник со сторонами длины $2\varepsilon_1$ и $2\varepsilon_2$ (без границы). Для $n=3$ это (открытый) параллелепипед с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ребра которого имеют длины $2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3$.

Определение. Пусть множество $G \subset E_n$. Точка $M \in G$ называется внутренней точкой множества G , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что M содержится в множестве G вместе со своей ε -окрестностью.

Если все точки множества G внутренние для G , то множество G называется *открытым множеством*.

Так, в случае $n=2$ любой круг без ограничивающей его окружности является примером открытого множества.

Определение. Точка $P \in E_n$ называется граничной точкой множества $G \subset E_n$, если в любой окрестности точки P существуют точки, как принадлежащие множеству G , так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества G называется его границей и обозначается ∂G .

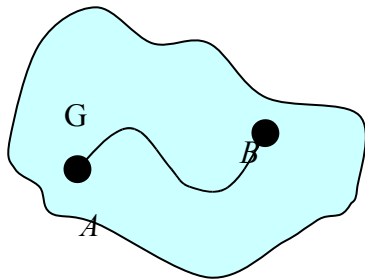
Если к множеству G присоединить его границу, то получим замкнутое множество $\bar{G}$:

$$\bar{G} = G \cup \partial G.$$

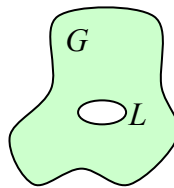
Примером замкнутого множества может служить круг вместе с ограничивающей его окружностью.

Определение. Множество $G \subset E_n$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой (в частности, ломаной), всеми своими точками содержащейся в множестве G .

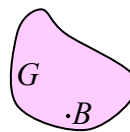
а) связное



б) несвязное



в) несвязное



Определение. Открытое связное множество называется *областью*.

Область называется ограниченной, если существует шар (круг), содержащий эту область.

Всякую область, содержащую данную точку M_0 , будем называть окрестностью точки M_0 (просто окрестностью, в отличие от ε -окрестности).

2. Понятие функции нескольких переменных.

Если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества G точек n -мерного евклидова пространства E_n по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число u , то говорят, что на множестве G определена функция точки M или функция n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, и пишут $u = f(M)$, или $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $M \in G$.

Множество G называется областью определения функции f .

При изучении функций нескольких переменных мы, как правило, будем ограничиваться рассмотрением функций двух переменных $z = f(x, y)$, так как обычно бывает ясно, как перенести выводы, сделанные для функции двух переменных, на функции большего числа переменных.

Если функция задана одним аналитическим выражением, причем область определения функции заранее не указана, то в качестве области определения принимают совокупность всех тех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых данное аналитическое выражение имеет конечное действительное значение (естественная область определения). Так, для функции $z = x + y$ область определения – вся плоскость xOy , для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ область определения – замкнутый круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области G на плоскости xOy . Тогда каждой точке $(x, y) \in G$ будет отвечать точка $(x, y, f(x, y))$ трехмерного пространства. Множество всех таких точек $(x, y, f(x, y))$, где точка $(x, y) \in G$, называется графиком функции $z = f(x, y)$. Например, график функции $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения.

Для изучения характера изменения функции $z=f(x, y)$ пользуются линиями уровня. Линией уровня называется множество точек на плоскости xOy , в которых функция f принимает данное постоянное значение $z=c$. Эту линию можно также получить, пересекая график функции $z=f(x, y)$ плоскостью $z=c$, параллельной плоскости xOy , и проектируя линию пересечения ортогонально на плоскость xOy . Система линий уровня $f(x, y)=c_m$ ($m=1, 2, \dots, k$), где $c_{m+1}-c_m=h=const$, позволяет судить о ходе изменения функции. Там, где линии уровня расположены густо, функция изменяется быстро, а где линии уровня расположены редко, функция изменяется медленно. Для функции $z=x^2+y^2$ линии уровня – концентрические окружности с центром в начале координат.

Этот прием изучения функции может быть распространен и на функции $u=f(x, y, z)$ трех независимых переменных. Вместо линий уровня тогда возникают поверхности уровня – множество точек $M(x, y, z)$ пространства, в которых функция $f(M)$ принимает данное постоянное значение. Например, для функции $u=x^2+y^2+z^2$ поверхности уровня – концентрические сферы с центром в начале координат.

3. Предел функции нескольких переменных.

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности Ω точки $M_0(x_0, y_0)$, кроме, быть может, самой точки M_0 .

Определение. Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M(x, y) \in \Omega$, отличных от точки $M_0(x_0, y_0)$ и удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, верно неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$ (1) (определение по Коши).

Обозначения: $A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ или $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$

Предполагается, что точка M может стремиться к точке M_0 по любому закону, по любому направлению, и все соответствующие предельные значения существуют и равны числу A .

Примеры.

1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Она определена на всей плоскости xOy , причем $f(0, 0) = 0$. Покажем, что предел этой функции в точке $O(0, 0)$ равен нулю. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда условие $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ запишется так: $|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon$, или $|x^2 + y^2| < \varepsilon$.

Замечая, что $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho(M, O)$, где $M(x, y)$ – точка с координатами (x, y) , последнему неравенству можно придать вид $\rho^2(M, O) < \varepsilon$, или $\rho(M, O) < \sqrt{\varepsilon}$.

Если взять $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, то для любой точки $M(x, y)$, для которой $\rho(M, O) < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, будем иметь $|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon$, или $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$. Согласно определению это означает, что число $A = 0$ есть предел данной функции в точке $O(0, 0)$.

2. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Этим заданием она определена всюду, исключая точку $O(0, 0)$. Рассмотрим поведение функции на различных лучах $y=kx$, $x \neq 0$. Имеем $f(x, kx) = \frac{2x^2 k}{(1+k^2)x^2}$, $x \neq 0$, откуда

$f(x, kx) \rightarrow \frac{2k}{1+k^2}$, так что при разных k мы получаем различные предельные значения.

Следовательно, данная функция в точке $O(0, 0)$ предела не имеет.

3. Пусть $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Эта формула задает функцию во всех точках плоскости xOy , кроме начала координат $O(0, 0)$. Исследуем поведение функции на различных лучах $y=kx$, $x \neq 0$. Имеем

$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2}, x \neq 0, \text{ так что } f(x, kx) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \text{ то есть предел функции } f(x, y) \text{ по любому}$$

направлению существует и равен нулю. Если же $y=x^2$, то $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$, $x \neq 0$, и, значит, предел

вдоль параболы $y=x^2$ существует, но равен $\frac{1}{2}$. Таким образом, данная функция в точке

$O(0, 0)$ предела не имеет.

Теорема. Если функции $f(M)$ и $\varphi(M)$ имеют предел в точке M_0 , то в точке M_0 существуют пределы суммы $f(M) + \varphi(M)$, разности $f(M) - \varphi(M)$, произведения $f(M) \cdot \varphi(M)$ и частного

$$\frac{f(M)}{\varphi(M)} \quad (\text{последнее при дополнительном условии, что } \lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) \neq 0), \text{ причем}$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \pm \varphi(M)) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \pm \lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M),$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \cdot \varphi(M)) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \cdot \lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M),$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{\varphi(M)} = \frac{\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)}{\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M)} \quad (\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) \neq 0)$$

Замечание. Удобным бывает следующее определение предела функции в точке (эквивалентное **определению по Коши**).

Определение. Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой «проколотой» окрестности Ω точки M_0 (то есть окрестности, из которой удалена точка M_0). Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 , если для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящейся в точке M_0 ($M_n \in \Omega$, $M_n \neq M_0$), соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}$ сходится к числу A – **определение по Гейне**.

Замечание. Рассмотренное выше понятие предела предполагает одновременное стремление всех аргументов к их предельным значениям: $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

4. Непрерывность функции нескольких переменных.

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности Ω точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0), \text{ или, что то же, } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \text{ или функция } f(M) \text{ непрерывна в}$$

точке M_0 , если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in \Omega$, таких, что $\rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Определению непрерывности функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ можно придать еще следующую форму. Если обозначить через Δx и Δy приращения независимых переменных x и y при переходе от точки $M_0(x_0, y_0)$ к точке $M(x, y)$, а через $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ обозначить соответствующее полное приращение функции $z = f(x, y)$, то равенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \text{ будет равносильно равенству } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0, \text{ выражающему условие}$$

непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Величины Δx , Δy могут стремиться к нулю произвольным образом, независимо друг от друга.

Теорема. Сумма, разность и произведение функций $f(M)$ и $\varphi(M)$, непрерывных в точке M_0 , есть функция непрерывная в точке M_0 . Частное $\frac{f(M)}{\varphi(M)}$ непрерывных в точке M_0 функций $f(M)$ и $\varphi(M)$ непрерывно в точке M_0 , если $\varphi(M_0) \neq 0$.

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке области D , то она называется непрерывной в области D . Точки, в которых функция $f(M)$ не является непрерывной, называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва функции $f(x, y)$ могут быть изолированными и могут заполнять целые линии. Так, функция $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ имеет единственную точку разрыва $O(0, 0)$; точки разрыва функции $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ заполняют прямые $y=x$ и $y=-x$.

Теорема. Если функция $f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$, то

- 1) $f(M)$ ограничена в $\bar{D}$;
- 2) $f(M)$ принимает в $\bar{D}$ наибольшее и наименьшее значения.