ЛЕКЦИЯ №1.

<u>ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ</u>

<u>Множества.</u>

Понятие множества.

Понятие множества относится к базовым понятиям математики. В математике нет более общего понятия, чем множество. Оно первоначально, его невозможно определить через другие понятия, так как определить – значит указать, какой частью более общих понятий является данное. Близкими к понятию «множество» можно считать понятия: собрание, совокупность, набор, комплекс, система и т.п. Замена одних слов другими не снимает самой проблемы определения. Все перечисленные понятия вводятся через описание наиболее характерных для них свойств, причем иногда приходится апеллировать к интуиции и жизненному опыту.

Основоположник теории множеств Г.Кантор (1845-1919) под множеством понимал любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Очевидно, что это высказывание не является определением, поскольку слово «множество» заменено словом «собрание». Вместе с тем здесь имеется три важных момента.

Объекты, входящие во множество, определенные. Это означает, что для каждого объекта можно однозначно сказать, принадлежит ли он данному множеству или нет.

Объекты, входящие во множество, различимы между собой. Следовательно, во множестве не может быть двух или более одинаковых объектов.

Все объекты, входящие во множество, мыслятся как единое целое. Этим подчеркивается, что все объекты рассматриваются в совокупности, а от свойств отдельных объектов абстрагируются.

Подмножества.

Определение подмножества. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент B одновременно является и элементом множества A. Тот факт, что B является подмножеством A, записывается так: $B\subset A$ (читается: «B содержится в A» или «B – подмножество множества A»).

<u>Пример.</u> Пусть заданы множества $A=\{1,3,5,7\}$ и $B=\{3,5\}$. Очевидно, что B есть подмножество A, то есть $B\subset A$.

Пример. Пусть Q – множество всех рациональных чисел, а Z – множество всех целых чисел, тогда $Z \subset Q$.

Из определения следует, что множество A есть подмножество самого себя, то есть $A \subset A$. Говорят, что A – самое широкое подмножество A.

Пустое множество является подмножеством любого множества A, то есть $\varnothing \subset A$. Докажем это утверждение методом «от противного». Пусть $\varnothing$ не является подмножеством A. Тогда во множестве $\varnothing$ есть элемент, который не принадлежит A. Но это невозможно, поскольку пустое множество по определению не содержит ни одного элемента. Следовательно, выражение $\varnothing \subset A$ истинно. Пустое множество является самым узким подмножеством любого множества.

Множество A и пустое множество $\varnothing$ называются несобственными подмножествами множества A. Все другие подмножества A называются собственными подмножествами A.

Пример. Если $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, то оно имеет следующие подмножества: $\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1,a_2\}$, $\{a_1,a_3\}$, $\{a_2,a_3\}$, $\{a_1,a_2,a_3\}$. Всего 8 подмножеств.

Пусть множество A состоит из n элементов. Сколько подмножеств оно имеет? Из n элементов можно сформировать C_n^k разных множеств, каждое из которых состоит ровно из k элементов, где C_n^k – число сочетаний из n по k. Подмножества A могут состоять из $k=0,1,2,\ldots,n$ элементов, то есть, всего $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$ подмножеств. Чему равна эта сумма? Ответить на этот вопрос поможет известная формула бинома Ньютона $(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k v^{n-k}$

Если в этой формуле положить $u=v=1$, то $(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} =2^n$.

Таким образом, мы получили, что любое множество, состоящее из n элементов, имеет ровно 2^n подмножеств. Из них ровно 2^n-2 являются собственными подмножествами. Элементами множества могут также выступать другие множества. В этом случае говорят не о множестве множеств, а о системе множеств. Частным случаем системы множеств является система всех подмножеств данного множества A и обозначается P(A). Так система подмножеств множества A из предыдущего примера имеет вид: $P(A)=\{\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_3\}\}$.

Замечание. Не следует путать символы $\in$ и $\subset$. Символ $\in$ - употребляется для обозначения отношения элемента к множеству. Символ $\subset$ - употребляется для обозначения отношения множества к множеству. Пусть, например, $A=\{1,2,3,\{1,2\},\{1,2,3\}\}$. Тогда для элементов 1, 2, 3 пишем $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$. Для множеств $\{1,2\}$ и $\{1,2,3\}$ пишем $\{1,2\} \subset A$, $\{1,2,3\} \subset A$. В то же время $\{1,3\} \notin A$, потому, что в A нет элемента $\{1,3\}$.

При работе в конкретной предметной области обычно ограничиваются некоторой совокупностью объектов. Например, при изучении вопросов дизайна одежды вряд ли изучают множество планет солнечной системы или множество сортов яблок. Зафиксированное каким-либо образом множество объектов, допустимых при данном рассмотрении, называют базовым или универсумом. Будем обозначать базовое множество буквой U. Примерами универсума являются: числа в арифметике, слова в языкознании, законы в юриспруденции.

Операции над множествами.

Множества можно определить и при помощи операций над другими множествами.

Равенство множеств. Множества A и B считаются равными (совпадающими), если они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств обозначают так: $A=B$. Если множества не равны, то пишут: $A\neq B$.

Доказательство равенства множеств состоит из двух частей:

1) для любого элемента множества A (формальная запись - $\forall x$) доказывается, что он принадлежит и множеству B. Формально это записывается так: $\forall x:(x\in A)\rightarrow(x\in B)$.
2) для любого элемента B доказывается, что он принадлежит и множеству A. Формально это можно записать так: $\forall y: (y\in B)\rightarrow(y\in A)$.

Отсюда следует, что запись равенства двух множеств «$A=B$» эквивалентна записи «$A\subset B$ и $B\subset A$».

Пример. Доказать, что множество $A=\{0,2,3\}$ равно множеству B корней уравнения $x^3+3x^2+6x=0$, то есть $B=\{x|x^3+3x^2+6x=0\}$. Для доказательства этого утверждения решим уравнение. Получим: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$. Следовательно, $\{0,2,3\}\subset\{x|x^3+3x^2+6x=0\}$ или $A\subset B$.

Затем непосредственной подстановкой убеждаемся, что любое из чисел 0, 2, 3 удовлетворяет уравнению, следовательно: $\{x|x^3+3x^2+6x=0\}\subset\{0,2,3\}$ или $B\subset A$.

Только теперь можно записать, что $A=B$.

Объединение (сумма) множеств. Объединением множеств A и B называется такое множество C, каждый элемент которого содержится хотя бы в одном из множеств A или B. Обозначается: $A\cup B$.

Пример. Если $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{1,3,5,7,9\}$, то $C=A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

Можно рассматривать объединение n множеств:

$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n$, при этом в A входят все элементы, которые входят хотя бы в одно из множеств $A_1,A_2,\ldots,A_n$.

Например, множество всех действительных чисел R состоит из множества положительных чисел R^+, множества отрицательных чисел R^- и множества $\{0\}$, содержащего один элемент – ноль, то есть $R=R^-\cup R^+\cup\{0\}$.

Для наглядного представления соотношений между несколькими подмножествами какого-либо универсума часто используются круги Эйлера или диаграммы Венна. Универсум представляется множеством всех точек некоторого прямоугольника, а его подмножества – соответствующими кругами. Операция объединения и другие операции иллюстрируются кругами Эйлера представленными на рисунке 1.1 – 1.5.

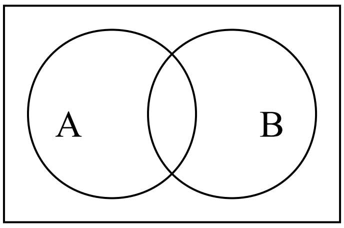


Рис.1.1 Объединение множеств C=A∪B

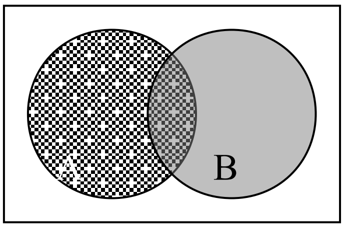


Рис.1.2 Пересечение множеств D=A∩B

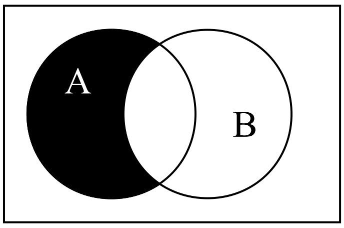


Рис.1.3 Разность множеств G=A\B

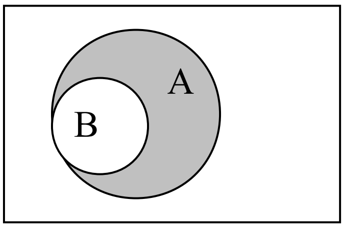


Рис.1.4 Дополнение к B до A (B⊂A); J=A\B

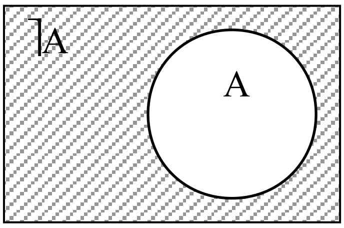


Рис.1.5 Дополнение A до универсума, то есть ⌉A

Пересечение (умножение) множеств. Пересечением множеств A и B называется множество D, составленное из общих для множеств A и B элементов. Обозначение: D=A∩B. Для множеств из примера 5 имеем: {1,2,3,4}∩{1,3,5,7,9}={1,3}.

Можно рассматривать пересечение n множеств:

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, при этом в A входят только те элементы, которые входят во все множества $A_1,A_2,\ldots,A_n$.

Пересечение двух множеств иллюстрируется на рисунке 1.2.

Пусть есть некоторое множество A. Говорят, что задано разбиение множества A на классы $A_1,A_2,\ldots,A_n$, если $A=\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ и $A_i \cap A_j=\varnothing$ для всех i и j.

Классы – это такие подмножества разбиваемого множества, которые не имеют общих элементов, а их объединение образует исходное множество A. Следовательно, каждый элемент множества A входит в один и только в один класс. Например, разбиение всех студентов одного факультета университета на учебные группы, разбиение книги на страницы, а страницы на абзацы, разбиение уголовного кодекса на статьи и т.п.

Разность двух множеств. Разностью двух множеств A и B называется множество G, содержащее лишь те элементы из A, которые не входят в B. Обозначение: $G=A \setminus B$. Отметим, что в A могут находиться не все элементы из вычитаемого множества B (см.рис.1.3). Например, $G=\{1,2,3,4\} \setminus \{1,3,5,7,9\} \setminus \{2,4\}$.

Если B – подмножество A ($B \subset A$), то разность $J=A \setminus B$ называется дополнением к B до A. Например, если $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ и $B=\{2,4\}$, то множество $\{1,3,5,6\}$ – дополнение к B до A. Операция дополнения иллюстрируется на рисунке 1.4.

Дополнение к A до универсума U имеет особое обозначение: $U \setminus A = \rceil A$ (см.рис.1.5).

Пример. Пусть $X=\{x|x\geq 0\}=\{0\}\cup R^{+}\equiv R_0$. Такое множество называется множеством неотрицательных чисел. Тогда $\rceil X=\{x|x<0\}=R^{-}$, это множество отрицательных чисел.

Свойства операций над множествами

Перечисляемые ниже свойства операций над множествами справедливы для любых множеств, поэтому их часто называют законами, часть которых имеет специальные наименования.

1. Коммутативный, или переместительный, закон имеет место, как для операции объединения, так и для операции пересечения: $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$.
2. Ассоциативный, или сочетательный, закон также имеет место и для операции объединения и для операции пересечения: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$, $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$.

Так как порядок выполнения операций несущественен, то скобки в записи опускают.

3. Дистрибутивный, или распределительный, закон: $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$, $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.
4. Закон идемпотентности: $A\cap A=A$, $A\cup A=A$.

5. Закон поглощения: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$.
6. Закон двойственности де Моргана: $\rceil(A \cap B) = \rceil A \cup \rceil B$, $\rceil(A \cup B) = \rceil A \cap \rceil B$.
7. $A \cup U = U$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
8. $A \cup \rceil A = U$, $A \cap \rceil A = \varnothing$.
9. $\forall A: A \cup B = A \rightarrow B = \varnothing$, $\forall A: A \cap B = A \rightarrow B = U$.
10. Если $A \cup B = U$ и одновременно $A \cap B = \varnothing \rightarrow B = \rceil A$.
11. $\rceil U = \varnothing$, $\rceil \varnothing = U$.
12. $\rceil(\rceil A) = A$.

Анализируя свойства 1-13, можно сформулировать принцип двойственности: всякое равенство, тождественно выполняемое в теории множеств, переходит также в тождественно выполняющееся равенство при замене знака объединения $\cup$ на знак пересечения $\cap$, множество универсум U на пустое множество $\varnothing$, и наоборот.

ЛЕКЦИЯ № 2.

Соответствия

Прямое произведение множеств

Введем в рассмотрение новое базовое понятие – **кортеж**. Под кортежем будем понимать любую выделенную *упорядоченную* совокупность объектов (элементов кортежа). Синонимами понятия «кортеж» являются: упорядоченная система, «n»-ка, упорядоченная совокупность, вектор, упорядоченный набор и др. В каждой из предметных областей чаще применяется какой-либо один термин, и там он, как правило, несет некоторую дополнительную смысловую нагрузку.

Элементы, составляющие кортеж, называются **компонентами**, которые в силу упорядоченности имеют номер: первый компонент, второй компонент, … n-ый компонент. Длиной кортежа называют число компонентов в кортеже. Когда вместо термина «кортеж» употребляется термин «вектор», то говорят, соответственно, о координатах и размерности вектора.

Примеры кортежей: N={8,7,4,4,7}. Это кортеж N длины 5, первый компонент которого – 8, второй – 7, третий – 4 и т.д.; M=(a,2x+8,{1,2,3},{a,a}), в этом случае (2x+8) – второй, а {a,a} – четвертый компонент кортежа M.

Отличие кортежа от множества заключается в том, что компоненты кортежа упорядочены и могут полностью или частично совпадать.

Два кортежа называются равными, если они имеют одинаковую длину и все их соответствующие компоненты совпадают.

Прямое произведение множеств. Прямым произведением двух множеств A и B (обозначается A×B) называется множество, состоящее изо всех тех и только тех пар, первая компонента которых принадлежит A, вторая B. Если первый сомножитель имеет n элементов, а второй – m, то их прямое произведение имеет n·m элементов, каждый из которых – упорядоченная пара.

Например, если A={1,3} и B={1,4,5}, то A×B={(1,1),(1,4),(1,5),(3,1),(3,4),(3,5)}. В общем случае, если $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ и $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$, то $A\times B=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),\ldots,(a_1,b_m),(a_2,b_1),\ldots,(a_n,b_m)\}$.

Прямым произведением n множеств $A_1,A_2,\ldots,A_n$ называется множество всех кортежей длины n («n-ок»), первый компонент которых принадлежит A_1, второй – A_2,…, n-ый – A_n, то есть $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(a_{k1},a_{m2},\ldots,a_{ij},\ldots,a_{in})\}$, где a_{ij} – i-ый элемент множества A_j.

Если все множества A_i равны между собой, то есть $A_1=A_2=\ldots=A_n\equiv A$, то прямое произведение множеств обозначается как A^n

$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=A\times A\times\ldots\times A=A^n$.

Например, пусть R – множество действительных чисел, тогда $R \times R = R^2$ – множество упорядоченных пар вида (x,y), где $x,y \in R$. Геометрически R – множество точек числовой оси, тогда R^2 – множество точек плоскости, где x и y – координаты этих точек. Поскольку координатное представление точек плоскости впервые было введено Р.Декартом (1596-1650), то прямое произведение часто называют декартовым произведением множеств. Множество P называется **графиком**, если каждый его элемент является упорядоченной парой, следовательно, любое подмножество множества R^2 можно назвать графиком.

Проекцией кортежа $A=(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ на i-ю ось (ПрA) называется i-ый компонент кортежа, то есть $a_i \equiv Пр_iA$. Проекция точки плоскости на первую ось ($Пр_1R^2=x$) называется абсциссой, на вторую ось – ординатой ($Пр_2R^2=y$).

Из определения прямого произведения следует, что оно не коммутативно, то есть $A \times B \neq B \times A$.

Пример. Пусть A – отрезок [1,3], B – отрезок [2,5]. Тогда $A \times B$ – множество точек прямоугольника, заштрихованного на рисунке 1.6, $B \times A$ – прямоугольник, заштрихованный на рисунке 1.7.

Пример. Пусть A – множество, элементами которого являются буквы, цифры и все знаки операций и препинания. Такое множество называют алфавитом. Тогда A^n – множество всех слов длины n.

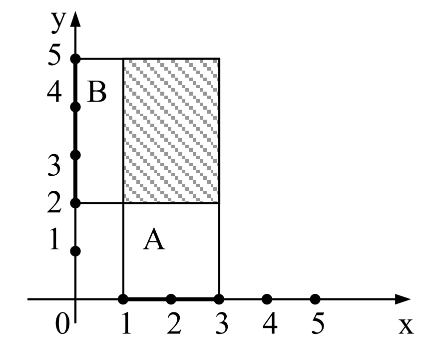


Рисунок 1.6. Множество $A \times B$.

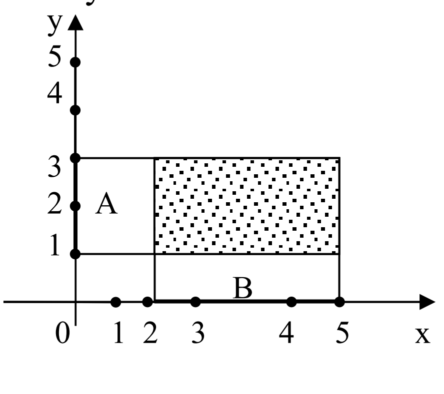


Рисунок 1.7. Множество $B \times A$.

Пример. Пусть $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$. Тогда A^4 – множество всех четырехразрядных чисел.

Следует отметить, что природа компонентов прямого произведения обычно отличается от природы элементов сомножителей. Например, пусть Q – множество участников шахматного турнира, тогда $Q \times Q=(q_i,q_j)$, при всех $i \neq j$, есть множество пар участников, причем q_i играет белыми фигурами, q_j – черными. Если N – множество всех натуральных чисел, то $N \times N$ есть множество упорядоченных пар (n,m), каждая из которых может определять самые различные объекты: дроби (n/m), номера соответственно домов и квартир в почтовых адресах, номера страниц и строк в книге, месяц и день рождения и т.п.

Понятие соответствия

Пусть заданы два множества X и Y. Если для каждого элемента $x \in X$ указан элемент $y \in Y$, с которым сопоставляется x, то говорят, что между множествами X и Y установлено **соответствие**. Иначе говоря, соответствием называется тройка множеств $\Gamma=(X,Y,G)$, где $G \subset X \times Y$. Множество X называется областью отправления, Y – областью прибытия, G – графиком соответствия. Если $(x,y) \in G$, то множество первых проекций ($Пр_1G$) называется областью определения соответствия, множество вторых проекций ($Пр_2G$) – областью значений этого соответствия, G – *графиком соответствия*.

Два соответствия равны, тогда и только тогда, когда равны их области отправления, области прибытия и графики.

Пример. Заданы четыре разных соответствия, имеющие одинаковые области отправления и прибытия:

$(X,Y,G_1)=(\{a,b,c\},\{x,y,z\},\{(a,x),(b,y),(c,z)\})$,

$(X,Y,G_2)=(\{a,b,c\},\{x,y,z\},\{(a,x),(a,y),(b,y),(c,z)\})$,

$(X,Y,G_3)=(\{a,b,c\},\{x,y,z\},\{(a,x),(b,y),(c,y)\})$,

$(X,Y,G_4)=(\{a,b,c\},\{x,y,z\},\{(b,y),(c,y)\})$.

На рисунке 1.8а, 1.8б, 1.8в и 1.8г различия этих соответствий видны достаточно наглядно.

В соответствии (X,Y,G) множество всех $y \in Y$, которые сопоставляются элементу $x \in X$, называется *образом* x в Y.

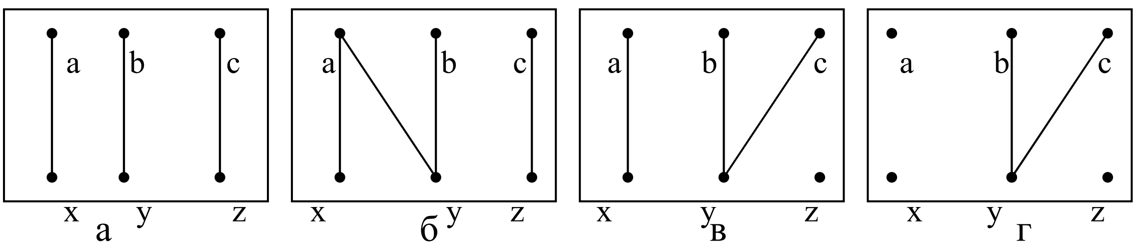


Рисунок 1.8.

Множество же всех $x \in X$, которым сопоставляют элемент $y \in Y$, называется *прообразом* y в X.

Соответствие называется *всюду определенным*, если множество $Пр_1G=X$, то есть его область определения совпадает с областью отправления (в противном случае говорят о частичном соответствии). Если же $Пр_2G=Y$, то соответствие называют *сюръективным*, или накрывающим. Это означает, что область значений соответствия совпадает с его областью прибытия. На рисунке 1.8а и 1.8б представлено всюду определенное сюръективное соответствие. Соответствия, представленные на рисунке 1.8в и 1.8г, не сюръективны, а соответствие, изображенное на рисунке 1.8г не всюду определенное.

Соответствие (X,Y,G) называется *функциональным* (или однозначным), если образом любого элемента из $Пр_1G$ является единственный элемент из $Пр_2G$. График такого соответствия называется функциональным. Это означает, что в нем нет пар с одинаковыми первыми и различными вторыми компонентами. Например, соответствие, представленное на рисунке 1.8б не функционально. Соответствие называется *инъективным*, если любому элементу из $Пр_2G$ соответствует единственный элемент из $Пр_1G$, на рисунке 1.8а изображено инъективное соответствие.

Соответствие между X и Y называется *взаимно-однозначным* (или *биективным*), если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Пусть X и Y – множества вещественных чисел. В этом случае график соответствия G может быть представлен некоторой линией на плоскости.

Например. На рисунке 1.9 представлено функциональное соответствие, но оно не инъективно (некоторым y соответствует более одного x), не всюду определено (G определен не для всех x), не сюръективно (G проектируется не на все y) и не биективно. На рисунке 1.10 представлено не функциональное соответствие, которое не всюду определено, сюръективно и не биективно. На рисунке 1.11 представлено взаимно-однозначное соответствие.

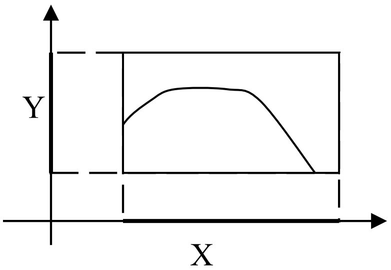
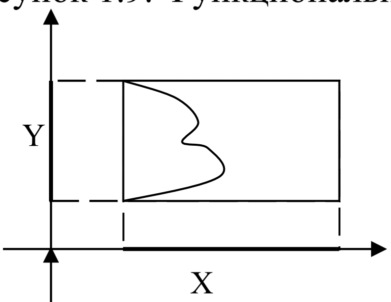


Рисунок 1.9. Функциональное соответствие.



Рисун иональное соответствие.

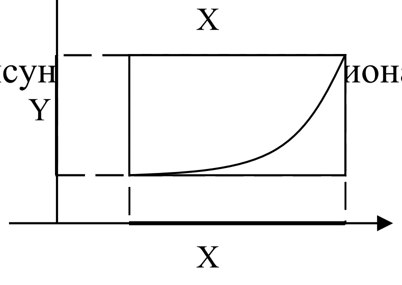


Рисунок 1.11. Взаимно-однозначное соответствие.

Мощность множества

Мощность множества характеризует количество элементов этого множества. Число элементов в конечном множестве A называется *кардинальным числом* и обозначается |A|. Подсчет элементов конечного множества заключается в установлении взаимно-однозначного соответствия между этими элементами и последовательностью натуральных чисел.

<u>**Теорема.**</u> Множества A и B имеют одинаковую мощность, если между этими множествами установлено взаимно-однозначное соответствие.

<u>Доказательство.</u> Пусть между множествами A и B установлено взаимно-однозначное соответствие. В силу вышеприведенного определения это означает, что оно всюду определено, сюръективно, функционально (единственность образа) и инъективно (единственность прообраза). Для доказательства теоремы требуется показать, что выполняется равенство |A|=|B|. Если это не так, то либо |A|>|B|, либо |B|>|A|.

Предположим, что |A|>|B|. В этом случае, поскольку соответствие между рассматриваемыми множествами всюду определено, в A должны найтись хотя бы два элемента, которым соответствует один элемент из B. Тем самым нарушается единственность образа. Отсюда очевидно, что мощность A не может быть больше мощности B.

Теперь предположим, что |B|>|A|. В силу сюръективности отображения при данном предположении в B найдутся хотя бы два элемента, соответствующие одному и тому же элементу из A. Однако в этом случае нарушается единственность прообраза и наше предположение о том, что мощность B больше мощности A ложно. Следовательно, |A|=|B| и теорема доказана.♦

Для бесконечных множеств вводится понятие равномощности. Множества *равномощны*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Бесконечное множество A называется *счетным*, если оно равномощно множеству всех натуральных чисел N. На практике это означает, что все элементы любого счетного множества можно сосчитать, то есть каждому элементу можно приписать отдельный номер. Примеры счетных множеств: множество целых чисел, четных чисел, рациональных чисел. Можно показать, что счетное множество образуется и при объединении счетного множества конечных множеств (например, множество слов в любом конечном алфавите) и т.д. Счетным будет и объединение счетного множества счетных множеств (множество всех векторов с натуральными компонентами). Множество A называется *не более чем счетным (дискретным)*, если оно конечно (в частности – пусто) или счетно. Счетное множество среди бесконечных множеств имеет наименьшую мощность.

Рассмотрим все вещественные числа на отрезке [0,1]. Эти числа не могут быть пронумерованы, следовательно, их множество не образует счетное множество, оно несчетно (теорема Кантора). По определению, множество, равномощное множеству всех вещественных чисел единичного отрезка числовой оси, имеет мощность континуума (непрерывного множества). Мощность множества **континуума** превышает мощность счетного множества. Любой конечный отрезок числовой оси равномощен единичному отрезку. Более того, любой конечный отрезок равномощен и всей числовой оси. Например, между отрезком [-(π/2,+(π/2] и множеством (-∞,+∞) можно установить такое соответствие: y=tg(x).

Множества наибольшей мощности не существует. Это следует из того, что мощность любого множества A всегда строго меньше мощности множества всех его подмножеств W(A).

<u>Функции</u>

Функциональное соответствие называется *функцией*. Функция – это тройка множеств (X,Y,F), где F – такой график соответствия ($F\subset X\times Y$), что в нем нет пар с одинаковыми первыми и различными вторыми компонентами. Поскольку функция – частный случай соответствия, то все введенные для соответствия определения и свойства справедливы и для функции.

Функцию вида (X,Y,f), где X и Y – подмножества вещественных чисел, обычно называют просто «функцией». Например, f(x)=sin(x) (читается: «ф от x равно синус x»).

Функция вида (X,Y,f), где X – множество функций, Y – множество вещественных или комплексных чисел, называется функционалом. Типичными примерами функционалов являются определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и связанные с ним понятия длины линии, площади плоской фигуры, объема тела. Функционалами являются: среднее значение функции на интервале, например средняя скорость движения или среднее ускорение, скалярное произведение векторов и т.д.

Функция вида (X,Y,f), где X,Y – множества функций, называется оператором. Например, $y(x)=\frac{d\varphi}{dx}$, где $\varphi\in X$, $y\in Y$, $f=\frac{d}{dx}$.

ЛЕКЦИЯ № 3.

Введение в дискретную математику.

Дискретная математика, или дискретный анализ, - область математики, занимающаяся изучением свойств структур конечного или не более чем счетного характера. В настоящее время существует целый ряд задач, которые не могут быть решены методами предлагаемыми непрерывной математикой. В первую очередь это задачи, связанные с развитием вычислительной техники и цифровых систем связи, изучением социальных, организационно-технических и экономических систем, математизации гуманитарных наук.

Разделение математики на дискретную и непрерывную весьма условно. Выделение дискретной математики как важного современного направления развития науки связано в первую очередь с характерными для нее объектами, специфика которых требует отказа от таких основополагающих понятий классической математики, как предел и непрерывность. А это приводит к тому, что для многих задач дискретного анализа средства классической математики оказываются часто малоприемлемы.

В рамках дискретной математики обычно рассматриваются: комбинаторный анализ, теории графов и кодирования, а также ряд разделов, имеющих общематематический характер.

Математическая логика

Основу современной математической логики составляют исчисление высказываний (первая логическая теория) и исчисление предикатов (вторая логическая теория).

Исчисление высказываний оперирует утверждениями, выступающими как единое целое, не рассматривая их субъективно-предикативную структуру. Сложные высказывания получаются из более простых при помощи логических связок, формализуемых соответствующими правилами. Истинность или ложность полученного сложного высказывания зависит только от истинности или ложности составляющих высказываний и не зависит от их содержания.

Все понятия в более широкой логической теории, называемой исчислением предикатов. В этой теории рассматривается внутренняя структура простых высказываний: в высказываниях выделяют подлежащее и сказуемое (предикат), и если на место подлежащего затем ставить другое подлежащее, то получится другое высказывание.

Тем самым предикат представляет собой высказывательную форму, определенную на множестве объектов, которые могут выступать в качестве подлежащих.

Алгебра высказываний

Логика высказываний – первая логическая теория – лежит в основе всех других разделов логики. Схема построения этой теории не отличается от схемы построения любой другой математической теории: берется некоторый класс объектов – первичных понятий, не интерпретируемых в данной теории, для них полагаются истинными некоторые свойства, вводятся отношения и операции над этими объектами. Так же, как и в теории множеств, основные понятия не определяются, а обычно разъясняются на примерах.

К основным понятиям математической логики относится высказывание.

Под высказыванием в классическом смысле слова будем понимать всякое утверждение (повествовательное предложение), про которое всегда определенно и объективно можно сказать, является оно истинным или ложным. Например, «5-3=2» или «В неделе семь дней» - истинные высказывания. Наоборот, «5>8» или «В русском языке 35 букв» - ложные высказывания. Синонимами слова «высказывание» можно считать: логическое высказывание, булевское выражение, суждение, утверждение и т.п. Фразы: «Ура!», «Который час?» - не являются высказываниями.

Если высказывание истинное, то ему предписывается значение «истина» (другие обозначения: «1», «ДА», «И», «+», «true»). Ложному высказыванию предписывается значение «ложь» (другие обозначения: «0», «НЕТ», «Л», «–», «false»). Совокупность возможных значений высказывания образует множество истинности {0,1} и {И,Л}.

Введем в рассмотрение два вида высказываний: простые и составные (сложные). Под простым будем понимать высказывание, которое не может быть разбито на более простые высказывания. Про него всегда однозначно можно сказать, что оно истинно или ложно, не интересуясь его структурой. Из простых высказываний при помощи так называемых логических операций можно строить сложные высказывания, которые всегда только истинны или только ложны. При этом истинность или ложность сложного высказывания зависит исключительно от истинности составляющих его простых высказываний. Изучение такого рода зависимостей является основной задачей алгебры высказываний.

Рассмотрим группу простых высказываний: «В Архангельской области летний день короче зимнего» - ложь; «В Архангельской области зимой обычно лежит снег» - истина; «Реки в Архангельской области в январе покрыты льдом» - истина; «Прогулочные катера могут ходить по замерзшим рекам» - ложь; «По снегу можно кататься на лыжах» - истина. Из этих простых высказываний формально можно построить, например, такие сложные высказывания: «В январе в Архангельской области лежит снег и по рекам не ходят прогулочные катера» - истинное высказывание; «В январе в Архангельской области зимний день короче летнего и реки не покрыты льдом, поэтому можно кататься на лыжах» - ложное высказывание. Еще раз подчеркнем, что в классической математической логике абстрагируются от содержания высказываний.

Тем самым любое сколь угодно сложное и даже содержательно неоднозначно интерпретируемое или вовсе абсурдное высказывание формально всегда истинно или ложно.

В практической деятельности часто встречаются утверждения, истинность которых не может быть установлена объективно и однозначно. Эти утверждения типа «хорошая погода», «справедливый закон» и т.п., могут рассматриваться как высказывания только в том случае, если четко определена истинность исходных простых высказываний, а данное высказывание является свернутой формой простых и известен контекст, в рамках которого проводится исследование. Так, например, суждению «сейчас на море хорошая погода» может быть приписана различная истинность в зависимости от того, идет ли речь о рыбной ловле, купании, катании на весельной лодке или круизе на океанском лайнере.

Высказывания будем обозначать заглавными латинскими буквами: A≡ «5+7=12», B≡ «сегодня вторник», C≡ «если студент успешно сдал сессионные экзамены, то переводится на следующий курс и будет получать стипендию». Использование таких обозначений упрощает запись процедур оперирования высказываниями и делает формулы математической логики похожими на выражения, традиционно встречающиеся в математике.

Операции над высказываниями

Для построения из данных высказываний новых высказываний вводятся определенные правила, которые называются операциями над высказываниями.

Отрицание высказывания. Для каждого высказывания A может быть сформировано новое высказывание $\rceil A$ – отрицание высказывания A, которое истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно. Символ «$\rceil$» соответствует логическому союзу «не».

$\rceil A$ читается «не A» или «не верно, что A». Например, если A≡3+5=8 – истинное высказывание, то $\rceil A$ 3+5≠8 – ложное высказывание (отрицание A), или, если B «в комнате холодно», $\rceil B$≡ «в комнате не холодно». Отметим, что высказывание «в комнате жарко» не является отрицанием B.

Логические операции удобно задавать в виде таблиц, называемых таблицами истинности. Для операции отрицания таблица истинности имеет вид:

Отрицание – одноместная (или унарная) операция. Последующие операции – двухместные (или бинарные).

A	$\rceil A$
1	0
0	1

Конъюнкция высказываний. Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание C=A∧B, которое истинно только в том случае, когда и A и B одновременно истинны. Выражение $A \wedge B$ читается «A и B». Операцию конъюнкции определяет следующая таблица истинности:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пусть $A \equiv$ «12 делится на 3» и $B \equiv$ «12 делится на 4». Тогда формула $A \wedge B$ имеет смысл: «12 делится на 3 и на 4».

Операцию конъюнкции можно определить и для нескольких высказываний как связку высказываний, объединенных союзом «и». Конъюнкция из n высказываний – новое высказывание, причем высказывание $A = \bigwedge_{i=1}^{n} Ai \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ имеет значение «истина», если и A_1, и A_2,… и A_n истинны. Во всех других случаях эта конъюнкция имеет значение «ложь». Пусть, например, $A_1 \equiv$ «5>3», $A_2 \equiv$ «8=3», $A_3 \equiv$ «отец старше сына», $A_4 \equiv$ «Мурманск севернее Смоленска». Тогда высказывание $A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge \equiv$ («8=3», и отец старше сына, и Мурманск севернее Смоленска») – ложное высказывание. В то время как $A_1 \wedge A_3 \wedge A_4 \equiv$ «5>3, и отец старше сына, и Мурманск севернее Смоленска» - истинное высказывание.

Дизъюнкция высказываний. Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $D = A \vee B$, которое ложно только тогда, когда и A и B ложны одновременно. Дизъюнкция имеет значение «истина», если хотя бы одно из высказываний, входящее в дизъюнкцию, является истинным. Выражение $A \vee B$ читается «A или B». Пусть $A \equiv$ «7<9» и $B \equiv$ «3+5=8». Тогда $A \vee B \equiv$ «7<9 или «3+5=8». Таблица истинности для дизъюнкции имеет вид:

A	B	$D = A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пусть, например, $A \equiv$ «сегодня облачно», $B \equiv$ «идет дождь». Тогда $A \vee B \equiv$ «сегодня облачно, или идет дождь». Это выражение ложно только в том случае, если сегодня и не облачно, и дождь не идет. Если же «сегодня облачно и дождь не идет» или «сегодня не облачно и дождь идет», или «сегодня облачно и идет дождь», то все эти высказывания, с точки зрения алгебры высказываний, истинны.

Операцию дизъюнкции можно определить для нескольких высказываний как связку высказываний, объединенных союзом «или»:

$$A = \bigvee_{i=1}^{n} Ai \equiv A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n .$$

В этом случае высказывание A истинно, если истинно хотя бы одно из высказываний, входящих в связку.

Импликация высказываний. Импликацией высказываний A и B называется высказывание F=A→B, которое ложно только в том случае, когда A – истинно, а B – ложно. Во всех других случаях импликация A→B имеет значение «истина». Символ «→» соответствует логическому союзу: «если… то…». Например, A – «целое число делится на 4», B – «целое число делится на 2». Их импликация A→B есть выражение: «если целое число делится на 4, то оно делится на 2».

Таблица истинности для импликации имеет вид:

A	B	F=A→B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Для иллюстрации содержательного смысла импликации рассмотрим следующий пример:

A≡ «папа завтра получит премию», B≡ «папа завтра купит сыну велосипед». Тогда импликация A→B может быть сформулирована так: «если папа завтра получит премию, то купит сыну велосипед». Пусть A и B истинны. Тогда папа, получив премию, покупает сыну велосипед. Естественно считать это истинным высказыванием. Когда же папа не купит сыну велосипед (B – ложно), получив премию (A – истинно), то это, мягко говоря, не логичный поступок, а импликация имеет значение «ложь». Если же папа не получит премию (A – ложно), но купит велосипед (B – истинно), то результат положителен. В том случае, если и A и B ложны, то есть не получив премии папа не купит велосипед, обещание не нарушено: результат можно считать истинным.

Эквивалентность высказываний. Эквивалентностью высказываний A и B называется высказывание G=A↔B, которое истинно, когда высказывания и A и B оба истинны или оба ложны. Символ логической эквивалентности «↔» соответствует связке «тогда и только тогда».

Пример. Пусть A≡ «число 3n является четным», B≡ «число n является четным». Высказывание «число 3n является четным тогда и только тогда, когда n – четное число» есть эквивалентность высказываний A и B.

Эквивалентность высказываний может быть задана следующей таблицей истинности:

A	B	G=A↔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Характерной особенностью операций над высказываниями является введение логических союзов с точно определенным смыслом, не допускающим никакой двусмысленности в толковании этих символов. В этом заключается основное отличие логического языка от естественного.

Таким образом, математическая логика применима не для любых высказываний, а только для таких, которые допускают четкую оценку в двоичной системе «истина-ложь». Для преодоления такого рода ограничений в рамках нечеткой математики разрабатывается нечеткая логика.

Рассмотрим пример. Пусть заданы высказывания: A≡ «вчера шел дождь», B≡ «сегодня пасмурно», C≡ «сегодня светит солнце», D≡ «сегодня идет снег». Построим из них следующую формулу: $A \rightarrow (B \vee C)$. На естественном языке это можно записать так: «если вчера шел дождь, то сегодня пасмурно или светит солнце». Формула $C \rightarrow \rceil(B \vee D)$ может быть прочитана так: «если сегодня светит солнце, то не верно, что пасмурно или идет снег». Заметим, что если перевод с обычного языка на символический не встречает затруднений, то при переводе с символьного на естественный часто появляется некоторая «корявость» фраз.

Если в выражении встречаются различные логические операции, то возникает проблема очередности их выполнения. В качестве естественного порядка (выполняемого поочередно слева направо) выберем следующую последовательность: $\rceil, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Это означает, что сначала выполняются операции отрицания, затем конъюнкции и т.д. Для нарушения такого порядка служат скобки.

Рассмотрим пример. Пусть высказывания A и B имеют значения «истина», а высказывания C и D – «ложь». Тогда формула $A \rightarrow B \wedge C \leftrightarrow D \vee A$ имеет значение «ложь», так как:

1. $\rceil D$ – «истина»
2. $B \wedge C$ – «ложь»
3. $(\rceil D) \vee A$ – «истина»
4. $A \rightarrow (B \wedge C)$ – «ложь»
5. $(A \rightarrow (B \wedge C)) \leftrightarrow (\rceil D \vee A)$ – «ложь».

Введя скобки, получим формулу $A \rightarrow B \wedge (C \leftrightarrow D) \vee A$, которая уже имеет другое значение – «истина». Действительно:

2. $\rceil D$ – «истина»
3. $C \leftrightarrow (\rceil D)$ – «ложь»
4. $B \wedge (C \leftrightarrow D)$ – «ложь»
5. $(B \wedge (C \leftrightarrow \rceil D)) \vee A$ – «истина»
6. $A \rightarrow (B \wedge (C \leftrightarrow \rceil D) \vee A$ – «истина».

Если в выражении $\rceil$ присутствуют арифметические операции, операции сравнения и логические операции, то порядок старшинства операций следующий:

- сначала выполняются арифметические операции (в порядке старшинства арифметических операций: первыми все операции умножения и деления, потом операции сложения и вычитания)
- =, ≠, затем операции сравнения (в том порядке, в каком они встречаются в выражении): >, ≥, ≤, <

- наконец, логические операции, причем первой везде выполняется операция конъюнкции, а потом дизъюнкции.

Использование различных операций позволяет в удобной аналитической форме задавать различные множества.

Например, множество точек A, заштрихованное на рисунке 2.1, может быть задано следующей формулой:

$A=\{(x,y)|(y\geq 1-x)\wedge(x^2+y^2\leq 1)\wedge(x,y)\in R^2\}$

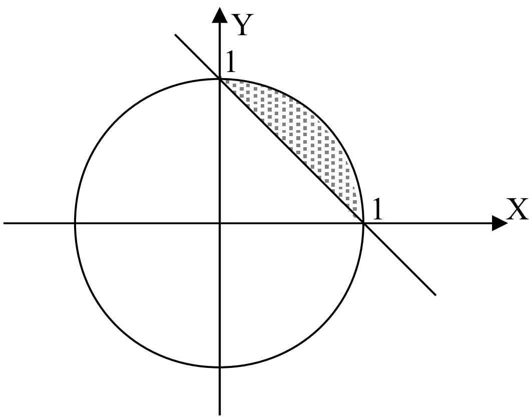


Рисунок 2.1

Система операций Σ называется полной, если всякая формула эквивалентна некоторой формуле, в которую входят только операции из системы Σ. Можно показать, что система введенных пяти операций (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности) полная. Между тем, эта система операций, вообще говоря, избыточна, так как одни логические операции могут быть выражены через другие. Например, импликация и эквивалентность можно выразить через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию следующим образом: $A\rightarrow B\equiv\rceil A\vee B$; $A\leftrightarrow B\equiv(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$.

Исключение «лишних» операций приводит к тому, что формулы становятся более длинными и менее обозримыми. Аналогичную ситуацию можно заметить, например, в арифметике, где вместо умножения можно использовать сложение (сравните 2×5=2+2+2+2+2). Другой пример. Находясь в рамках русского алфавита, можно было бы обойтись словами, состоящими не более чем из пяти букв. Однако мы употребляем «длинные» слова (переустройство, невостребованность и т.п.), в то время как многие «короткие» слова ничего не обозначают и являются словами чисто теоретически (лыв, фкнн, сфют, алл и др.).

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Формулы алгебры логики

Итак, высказыванием называется повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

В качестве примеров высказываний приведем предложения «НГТУ – крупнейший вуз Новосибирска» и «Снег зеленый». Первое высказывание является истинным, а второе – ложным.

Поставим в соответствие высказыванию P логическую переменную x, которая принимает значение 1, если P истинно, и 0, если P ложно.

Если имеется несколько высказываний, то из них можно образовать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания называются простыми, а вновь образованные – сложными. Соответственно из логических переменных можно составлять различные конструкции, которые образуют формулы алгебры логики.

Итак, пусть $\{x_i | i \in I\}$ – некоторое множество логических переменных. Определим по индукции понятие формулы алгебры логики:

1) любая логическая переменная является формулой (называется атомарной);
2) если φ и ψ - формулы, то выражения $\overline{\varphi}$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ являются формулами;
3) никаких других формул, кроме построенных по пп.1 и 2, нет.

Если формула φ построена из логических переменных, лежащих в множестве $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, то будем писать $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.

Символы $-$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, использованные в определении, называются логическими операциями или связками и читаются соответственно: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность.

Введенные в п.2 формулы следующим образом интерпретируются в русском языке: $\overline{\varphi}$ - «не φ», $(\varphi\wedge\psi)$ – «φ и ψ», $(\varphi\vee\psi)$ – «φ или ψ», $(\varphi\rightarrow\psi)$ – «если φ, то ψ», $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ – «φ тогда и только тогда, когда ψ».

Вместо $\overline{\varphi}$ часто пишут $\neg\varphi$, вместо $(\varphi\wedge\psi)$ – $(\varphi\&\psi)$, $(\varphi\cdot\psi)$ или $(\varphi\psi)$.

Действия логических операций задаются таблицами истинности, каждой строке которых взаимно однозначно сопоставляется набор значений переменных, составляющих формулу, и соответствующее этому набору значение полученной формулы:

φ	$\overline{\varphi}$
0	1
1	0

φ	ψ	$(\varphi\wedge\psi)$	$(\varphi\vee\psi)$	$(\varphi\rightarrow\psi)$	$(\varphi\leftrightarrow\psi)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Приведенные таблицы истинности называются также интерпретациями логических операций и составляют семантику формул (то есть придание смысла формулам) в отличие от синтаксиса формул (то есть формальных законов их построения, данных в определении формулы).

Исходя из таблиц истинности для логических операций, можно строить таблицы истинности для произвольных формул.

Пример. Построить таблицу истинности для формулы $\varphi=((x\to y)\wedge(\bar{y}\to z)\to \bar{x}))$.

Будем строить таблицу истинности последовательно в соответствии с шагами построения формулы φ:

x	y	z	$(x\to y)$	$(\bar{y}\to z)$	$((\bar{y}\to z)\to \bar{x})$	φ
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Легко заметить, что таблица истинности для φ совпадает с таблицей истинности для $\bar{x}$. В дальнейшем выяснится причина этого совпадения.

Расширим понятие формулы, введя новые, не менее важные логические операции:

- $(\varphi|\psi)$ – штрих Шеффера или антиконъюнкция, по определению $(\varphi|\psi)\equiv\neg(\varphi\wedge\psi)$;
- $(\varphi\downarrow\psi)$ – стрелка Пирса или антидизъюнкция, по определению $(\varphi\downarrow\psi)\equiv\neg(\varphi\vee\psi)$;
- $(\varphi\oplus\psi)$ – кольцевая сумма, логическое сложение или сложение по модулю 2, по определению $(\varphi\oplus\psi)\equiv\neg(\varphi\leftrightarrow\psi)$.

Составим, исходя из определений, таблицы истинности для этих трех операций:

φ	ψ	$(\varphi\|\psi)$	$(\varphi\downarrow\psi)$	$(\varphi\oplus\psi)$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Как видно из примера, даже при составлении несложных формул возникает обилие скобок. Чтобы избежать этого, в алгебре логики, так же как и в арифметике, приняты некоторые соглашения относительно расстановки скобок. Перечислим эти соглашения.

1. Внешние скобки не пишутся. Например, вместо высказывания $((x \vee y) \to z)$ пишется $(x \vee y) \to z$.
2. На множестве $\{-, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |, \downarrow, \oplus\}$ вводится транзитивное отношение < «быть более сильным» и отношение эквивалентности ~ «быть равносильным» по правилам, показанным на рисунке 1.

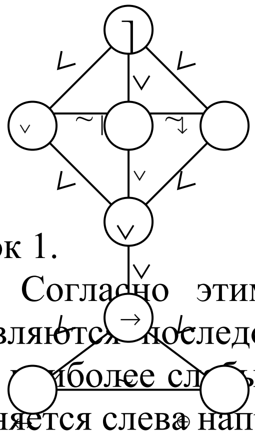


Рисунок 1.

Согласно этим отношениям недостающие скобки в формуле расставляются последовательно, начиная с наиболее сильных связок и кончая наиболее слабыми, а для равносильных связок расстановка скобок выполняется слева направо.

Пример 6.1.2. В формуле $x \wedge y \vee z$ скобки расставляются следующим образом: $((x \wedge y) \vee z)$; в формуле $x \vee y \leftrightarrow z \to u$ – $((x \vee y) \leftrightarrow (z \to u))$, в формуле $x \oplus y \leftrightarrow \bar{z} \to u \vee v \wedge w \downarrow x | y$ – $((x \oplus y) \leftrightarrow (\bar{z} \to (u \vee (((v \wedge w) \downarrow x) | y))))$.

Отметим, что, например, в формуле $x \to (\bar{y} \to z)$ скобки убирать нельзя, поскольку в силу наших соглашений формуле $x \to \bar{y} \to z$ соответствует формула $(x \to \bar{y}) \to z$.

Функции алгебры логики

В предыдущем параграфе мы выяснили, что семантически формулы полностью характеризуются таблицами истинности. При этом можно забыть о синтаксической структуре самих формул и иметь дело с таблицами истинности. Таким образом, мы приходим к понятию функции алгебры логики, которое и будет исследоваться в дальнейшем.

Функцией алгебры логики (ФАЛ) от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется любая функция $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, то есть функция, которая произвольному набору $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ нулей и единиц ставит в соответствие значение $f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in \{0,1\}$.

Функции алгебры логики называются также булевыми функциями, двоичными функциями и переключательными функциями.

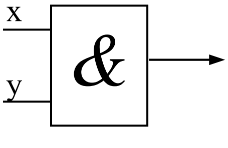


Рисунок 6.3.

Булевой функцией описываются преобразования некоторым устройством входных сигналов в выходные. Предположим, что устройство, показанное на рисунке 6.2, имеет n входов $x_1,x_2,\dots,x_n$, на которые может подаваться или не подаваться ток, и один выход, на который ток подается или не подается в зависимости от подачи тока на входы. При этом значение переменной $x_i=1$ интерпретируется как поступление тока на I-й вход, а $x_i=0$ – как непоступление тока. Значение $f(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)$ равно 1, если при $x_1=\delta_1,\dots, x_n=\delta_n$ ток на выход проходит, и $f(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)=0$, если ток не проходит.

Например, операции конъюнкции $x\wedge y$ соответствует устройство с двумя входами и одним выходом. При этом значение выхода равно 1, тогда и только тогда, когда оба значения входов равны 1 (рисунок 6.3).

Булева функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ полностью определяется своей таблицей истинности:

X_1	X_2	X_3	…	X_{n-1}	x_n	$F(x_1,x_2,\dots,x_n)$
0	0	0	…	0	0	F(0,0,…,0,0)
0	0	0	…	0	1	F(0,0,…,0,1)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1	1	1	…	1	0	F(1,1,…,1,0)
1	1	1	…	1	1	F(1,1,…,1,1)

В каждой строке таблицы вначале задается набор значений переменных $(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)$, а затем – значение функции на этом наборе.

Если булева функция f и формула φ имеют одну и ту же таблицу истинности, то будем говорить, что формула φ представляет функцию f.

Булева функция также однозначно задается перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 0, либо перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 1.

Пример 6.2.1 (голосование). Рассмотрим устройство, фиксирующее принятие некоторой резолюции «комитетом трех». Каждый член комитета при одобрении резолюции нажимает свою кнопку. Если большинство членов согласны, то резолюция принимается. Это фиксируется регистрирующим прибором. Таким образом, устройство реализует функцию f(x,y,z), таблица истинности которой имеет вид

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
F(x,y,z)	0	0	0	1	0	1	1	1

Полученную функцию f можно также задать следующей системой равенств: $f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(0,1,0)=f(1,0,0)=0$.

Вектором значений булевой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется упорядоченный набор всех значений функции f, при котором значения упорядочены по лексикографическому порядку множества аргументов $\{0,1\}^n$.

В примере 6.2.1 вектором значений булевой функции f(x,y,z) является набор (00010111).

Отметим, что поскольку всего имеется 2^n наборов $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ нулей и единиц $(|\{0<1\}^n|=2^n$, существует ровно 2^{2^n} булевых функций $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ от n переменных: $|\{f|f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}\}|=|\{0,1\}|^{|\{0,1\}^n|}=2^{2^n}$.

Таким образом, имеется, например, 16 булевых функций от двух переменных, 256 – от трех и т.д.

Наборы $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ нулей и единиц можно представить в виде вершин n-мерных кубов или в виде вершин 2-дерева, каждая вершина которого представляет собой некоторый набор $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ нулей и единиц или пустое слово Λ. При этом с вершиной $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{n-1},\delta_n)$, $n\geq 2$, смежны вершины $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{n-1})$, $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{n-1},0)$, $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{n-1},1)$, с вершиной δ_1-Λ, $(\delta_1,0)$ и $(\delta_1,1)$, с вершиной Λ-0 и 1. На каждом этаже изображенного 2-дерева располагаются всевозможные наборы $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ нулей и единиц фиксированной длины n.

Функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется **суперпозицией** функций $g(y_1,\ldots,y_m)$ и $h_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, если $f(x_1,\ldots,x_n)=g(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n))$.

Пример 6.2.2. Функция f, соответствующая формуле $x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_4x_1$, есть суперпозиция функции g, представляемой формулой $y_1\oplus y_2\oplus y_3$, и функций h_1, h_2, h_3. соответствующих формулам x_1x_2, x_2x_3, x_4x_1.

Булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, принимающая значение 1 (соответственно 0) на всех наборах нулей и единиц: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv 1$ (соответственно $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv 0$), называется **константой 1** (**константой 0**).

Опишем булеву алгебру $\mathbb{B}_n$ функций алгебры логики от n переменных. В качестве носителя рассмотрим множество $B_n=\{f|f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}\}$. Отношение $\leq$ на множестве B_n определим по следующему правилу: $f_1\leq f_2\Leftrightarrow f_1(X)\leq f_2(X)$ для любого набора значений $X=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. Пересечением $f\wedge g$ функций f и g называется такая функция h, что $h(X)=\min\{f(X),g(X)\}$ на любом наборе значений $X=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. Объединением $f\vee g$ функций f и g называется такая функция h, что $h(X)=\max\{f(X),g(X)\}$ на любом наборе X. Дополнение $\overline{f}$ функции f определяется следующим образом:

$$\overline{f}(X)=\begin{cases}0, \text{если} f(X)=1\\ 1, \text{если} f(X)=0\end{cases}$$

В качестве 0 рассмотрим функцию, являющуюся константой 0, а в качестве 1 возьмем константу 1. Система $\mathbb{B}_n=<B_n,\wedge,\vee,0,1>$ образует булеву алгебру функций алгебры логики от n переменных (алгебру булевых функций).

Эквивалентность формул

Как показано в примере 6.1.1, различные формулы могут иметь одинаковые таблицы истинности. Так возникает понятие эквивалентности формул.

Формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ и $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ называются эквивалентными ($\varphi\sim\psi$), если совпадают их таблицы истинности, то есть совпадают представляемые этими формулами функции $f_\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ и $f_\psi(x_1,\ldots,x_n)$.

Пример 6.3.1. Построив таблицы истинности формул $x\rightarrow y$ и $\overline{y}\rightarrow\overline{x}$, убеждаемся, что $(x\rightarrow y)\sim(\overline{y}\rightarrow\overline{x})$.

Легко видеть, что отношение ~ является отношением эквивалентности, то есть оно рефлексивно ($\varphi\sim\varphi$), симметрично ($\varphi\sim\psi\Rightarrow\psi\sim\varphi$) и транзитивно ($\varphi\sim\psi$, $\psi\sim\chi\Rightarrow\varphi\sim\chi$).

Отметим основные эквивалентности между формулами:

1) $((\varphi\wedge\psi)\wedge\chi)\sim(\varphi\wedge(\psi\wedge\chi))$, $((\varphi\vee\psi)\vee\chi)\sim(\varphi\vee(\psi\vee\chi))$ (ассоциативность $\wedge$ и $\vee$);
2) $(\varphi\wedge\psi)\sim(\psi\wedge\varphi)$, $(\varphi\vee\psi)\sim(\psi\vee\varphi)$ (коммутативность $\wedge$ и $\vee$);
3) $(\varphi\wedge\varphi)\sim\varphi$, $(\varphi\vee\varphi)\sim\varphi$ (идемпотентность $\wedge$ и $\vee$);
4) $(\varphi\wedge(\psi\vee\chi))\sim((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi))$, $(\varphi\vee(\psi\wedge\chi))\sim((\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi))$ (законы дистрибутивности);
5) $(\varphi\wedge(\varphi\vee\psi))\sim\varphi$, $(\varphi\vee(\varphi\wedge\psi))\sim\varphi$ (законы поглощения);
6) $\neg(\varphi\wedge\psi)\sim\neg\varphi\vee\neg\psi$, $\neg(\varphi\vee\psi)\sim\neg\varphi\wedge\neg\psi$ (законы де Моргана);
7) $\neg\neg\varphi\sim\varphi$ (закон двойного отрицания);
8) $\varphi\rightarrow\psi\sim\neg\varphi\vee\psi$;
9) $\varphi\leftrightarrow\psi\sim((\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi)\sim(\neg\varphi\vee\psi)\wedge(\neg\psi\vee\varphi)$;
10) $(\varphi\vee\neg\varphi\psi)\sim(\varphi\vee\psi)$, $(\neg\varphi\vee\varphi\psi)\sim(\neg\varphi\vee\psi)$;
11) $\varphi(\neg\varphi\vee\psi)\sim\varphi\psi$, $\neg\varphi(\varphi\vee\psi)\sim\neg\varphi\psi$.

Формула $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется выполнимой (опровержимой), если существует такой набор значений переменных, при котором формула принимает значение 1 (соответственно 0).

Пример 6.3.2. Формула $x\wedge y$ является одновременно выполнимой и опровержимой, поскольку $0\wedge0=0$, а $1\wedge1=1$.

Формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ называется тождественно истинной, общезначимой или тавтологией (тождественно ложной или противоречием), если эта формула принимает значение 1 (соответственно 0) при всех наборах значений переменных, то есть функция f является константой 1 (константой 0).

Пример 6.3.3. Формула $x\vee\overline{x}$ является тождественно истинной, а формула $x\wedge\overline{x}$ - тождественно ложной:

x	$x\vee\overline{x}$	$x\wedge\overline{x}$
0	1	0

1	1	0

Если φ - тождественно истинная формула, то будем писать $|=\varphi$. В противном случае пишем $|\neq\varphi$. Таким образом, $|=x\vee\bar{x}$, $|\neq x\wedge y$, и $|\neq x\wedge\bar{x}$.

Очевидным является следующее

Замечание 6.3.1.

1) Формула φ тождественно ложна тогда и только тогда, когда $\neg\varphi$ тождественно истинна ($|=\neg\varphi$);
2) Формула φ опровержима тогда и только тогда, когда она не является тождественно истинной ($|\neq\varphi$);
3) Формула φ выполнима тогда и только тогда, когда она не является тождественно ложной.

Отметим, что тождественно истинные (соответственно тождественно ложные) формулы образуют класс эквивалентности по отношению ~.

Предложение 6.3.2. Если формула φ_1 тождественно истинна, φ_0 – тождественно ложна, то для любых формул φ и ψ справедливы следующие эквивалентности:

$\varphi\wedge\varphi_1\sim\varphi$; $\varphi\wedge\varphi_0\sim\varphi_0$; $\varphi\vee\varphi_1\sim\varphi_1$; $\varphi\vee\varphi_0\sim\varphi$; $(\varphi\psi\to\varphi)\sim\varphi_1$; $(\varphi\to\varphi\vee\psi)\sim\varphi_1$; $\varphi\oplus\varphi\sim\varphi_0$; $\varphi\oplus\varphi_1\sim\bar{\varphi}$; $\varphi\oplus\varphi_0\sim\varphi$.

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Если x – логическая переменная, $\delta\in\{0,1\}$, то выражение

$x^\delta=\begin{cases} x, если \delta = 1, \\ \bar{x}, если \delta = 0 \end{cases}$ называется литерой. Литеры x и $\bar{x}$ называются контрарными.

Элементарной конъюнкцией или конъюнктом называется конъюнкция литер. Элементарной дизъюнкцией или дизъюнктом называется дизъюнкция литер.

Пример 6.4.1. Формулы $x\vee\bar{y}\vee\bar{z}$ и $x\vee y\vee x\vee\bar{x}$ - дизъюнкты, формулы $\bar{x}_1x_2x_3$ и $x_1x_2\bar{x}_1$ - конъюнкты, а $\bar{x}$ является одновременно и дизъюнктом, и конъюнктом.

Дизъюнкция конъюнктов называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ); конъюнкция дизъюнктов называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Пример 6.4.2. Формула $x\bar{y}\vee yz$ - ДНФ, формула $(x\vee z\vee\bar{y})(x\vee z)y$ – КНФ, а формула $x\bar{y}$ является одновременно КНФ и ДНФ.

Теорема 6.4.1. 1. Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.

2. Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.

Опишем алгоритм приведения формулы к ДНФ.

1. Выражаем все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, используя эквивалентности $(\varphi\to\psi)\sim(\neg\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)\sim(\neg\varphi\vee\psi)\wedge(\neg\psi\vee\varphi)$ и определения операций |, $\downarrow$ и $\oplus$.
2. Используя законы де Моргана, переносим все отрицания к переменным и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x\sim x$.
3. Используя закон дистрибутивности $(\varphi\wedge(\psi\vee\chi))\sim((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi))$, преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

В результате применения пп.1-3 получается ДНФ данной формулы.

Пример 6.4.3. Приведем к ДНФ формулу $\varphi=((x\to y)\downarrow\neg(y\to z))$.

Выразим логические операции $\to$ и $\downarrow$ через $\wedge$, $\vee$ и $\neg$: $\varphi\sim((\bar{x}\vee y)\downarrow\neg(\bar{y}\vee z)\sim\neg((\bar{x}\vee y)\vee\neg(\bar{y}\vee z))$. В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания: $\varphi\sim(\neg(\bar{x}\vee y)\wedge\neg\neg(\bar{y}\vee z))\sim(\bar{\bar{x}}\wedge\bar{y})\wedge(\bar{y}\vee z)\sim(x\wedge\bar{y})\wedge(\bar{y}\vee z)$.

Используя закон дистрибутивности, приводим формулу к ДНФ: $\varphi\sim(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{y})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\cdot$

Приведение формулы к КНФ производится аналогично приведению ее к ДНФ, только вместо п.3 применяется

3′. Используя закон дистрибутивности $(\varphi\vee(\psi\wedge\chi))\sim((\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi))$, преобразуем формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

Пример 6.4.4. Приведем к КНФ формулу $\varphi=(x\to y)\wedge((\bar{y}\to z)\to\bar{x})$.

Преобразуем формулу φ к формуле, не содержащей $\to$: $\varphi\sim(\bar{x}\vee y)\wedge(\neg(\bar{y}\to z)\vee\bar{x})\sim(\bar{x}\vee y)\wedge(\neg(\bar{\bar{y}}\vee z)\vee\bar{x})$. В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания: $\varphi\sim(\bar{x}\vee y)\wedge((\bar{\bar{\bar{y}}}\wedge\bar{z})\vee\bar{x})\sim(\bar{x}\vee y)\wedge((\bar{y}\wedge\bar{z})\vee\bar{x})$. По закону дистрибутивности получаем, что формула φ эквивалентна формуле $(\bar{x}\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})\wedge(\bar{x}\vee\bar{z})$, являющейся КНФ.

Упростим полученную формулу: $(\bar{x}\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})\wedge(\bar{x}\vee\bar{z})\overset{(1)}{\sim}(\bar{x}\vee(y\wedge\bar{y}))\wedge(\bar{x}\vee\bar{z})\overset{(2)}{\sim}\bar{x}\wedge(\bar{x}\vee\bar{z})\overset{(3)}{\sim}\bar{x}$ (для преобразования (1) использовался закон дистрибутивности, для (2) – эквивалентность 4 предложения 6.3.2., для (3) – закон поглощения). Таким образом, формула φ из примера 6.1.1 эквивалентными преобразованиями приводится к формуле $\bar{x}$ (являющейся одновременно ДНФ и КНФ формулы φ).

Любая булева функция может иметь бесконечно много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают совершенные ДНФ (СДНФ) и совершенные КНФ (СКНФ).

Пусть $(x_1,\dots,x_n)$ – набор логических переменных, $\Delta=(\delta_1,\dots,\delta_n)$ – набор нулей и единиц. Конституентой единицы набора Δ называется конъюнкт $K^1(\delta_1,\dots,\delta_n)=x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_n^{\delta_n}$. Конституентой нуля набора Δ называется дизъюнкт $K^0(\delta_1,\dots,\delta_n)=x_1^{1-\delta_1} \vee x_2^{1-\delta_2} \vee \dots \vee x_n^{1-\delta_n}$.

Отметим, что $K_1(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)=1$ ($K^0(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)=0$) тогда и только тогда, когда $x_1=\delta_1$, $x_2=\delta_2,\dots$, $x_n=\delta_n$.

Совершенной ДНФ называется дизъюнкция некоторых конституент единицы, среди которых нет одинаковых, а совершенной КНФ называется конъюнкция некоторых конституент нуля, среди которых нет одинаковых. Таким образом, СДНФ (СКНФ) есть ДНФ (КНФ), в который в каждый конъюнкт (дизъюнкт) каждая переменная x_i из набора $\{x_1,\dots,x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\overline{x_i}$.

Пример 6.4.5. Формула $x_1 \overline{x_2} x_3$ есть конституента единицы $K^1(1,0,1)$, формула $x \vee y \vee \overline{z}$ есть конституента нуля $K^0(0,0,1)$, формула $x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3$ - СДНФ, формула

$(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z)$ - СКНФ, а формула $x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3$ не является СДНФ.

Для решения задачи нахождения СДНФ и СКНФ, эквивалентных исходной формуле φ, предварительно рассмотрим разложения булевой функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ по k переменным (для определенности по $x_1,x_2,\dots,x_k$) – разложения Шеннона.

Теорема 6.4.2. (первая теорема Шеннона).

Любая булева функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ представима в виде разложения Шеннона: $f(x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=\underset{\substack{\text{повсемнаборам}\\(\delta_1,\dots,\delta_n)}}{V} (\overset{k}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i^{\delta_i}) f(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_k,x_{k+1},\dots,x_n)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $x_i^{\delta_i}=1 \Leftrightarrow x_i=\delta_i$. Подставим произвольно вместо первых k переменных их значения: $x_1=\delta_1^*$, $x_2=\delta_2^*,\dots$, $x_k=\delta_k^*$. Тогда левая часть доказываемой формулы равна $f(\delta_1^*,\delta_2^*,\dots,\delta_k^*,x_{k+1},\dots,x_n)$. Правая часть представляет собой дизъюнкцию 2^k конъюнкций вида $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_k^{\delta_k} f(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_k,x_{k+1},\dots,x_n)$, которые этой подстановкой разбиваются на два класса. К первому классу относится конъюнкция, у которой набор $(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_k)$ совпадает с набором $(\delta_1^*,\delta_2^*,\dots,\delta_k^*)$:

$$(\delta_1^*)^{\delta_1^*}(\delta_2^*)^{\delta_2^*}\dots(\delta_k^*)^{\delta_k^*} f(\delta_1^*,\delta_2^*,\dots,\delta_k^*,x_{k+1},\dots,x_n) = 1\cdot 1\cdot\dots\cdot 1\cdot f(\delta_1^*,\delta_2^*,\dots,\delta_k^*,x_{k+1},\dots,x_n) = f(\delta_1^*,\delta_2^*,\dots,\delta_k^*,x_{k+1},\dots,x_n)$$

Эта конъюнкция равна левой части формулы. Ко второму классу 2^k-1 конъюнкций, у каждой из которых хотя бы в одной переменной x_i, $i\in\{1,2,\dots,k\}$ выполнимо условие $\delta_I^* \neq \delta_i$. Следовательно, каждая из них равна нулю.

Используя закон $a \vee 0 = a$, получаем, что левая и правая части формул равны при любой подстановке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В силу принципа двойственности для булевых алгебр справедлива

Теорема 6.4.3. (вторая теорема Шеннона). Любая булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ представима в виде разложения Шеннона:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=\bigwedge_{\substack{\text{по всем} \\ \text{наборам} \\ (\delta_1,\ldots,\delta_k)}} (\bigvee_{i=1}^{k} x_i^{1-\delta_i} \vee f(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k,x_{k+1},\ldots,x_n)).$$

В предельном случае, когда $k=n$, для булевой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, не равной нулю, получаем ее представление в виде совершенной ДНФ:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n), \\ \text{на которых} \\ f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1}} (\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i}).$$

Аналогично для булевой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, не равной единице, получаем ее представление в виде совершенной КНФ:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bigwedge_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n), \\ \text{на которых} \\ f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=0}} (\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{1-\delta_i}).$$

Приведенные формулы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.4.4. (о функциональной полноте). Для любой булевой функции f найдется формула φ, представляющая функцию f. Если $f \neq 0$, то существует представляющая ее формула φ, находящаяся в СДНФ: $\varphi \bigvee_{f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1} K^1(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, и такое представление единственно с точностью до порядка следования конституент единицы. Если $f \neq 1$, то существует представляющая ее формула φ, находящаяся в СКНФ: $\varphi = \bigwedge_{f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=0} K^0(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, и такое представление единственно с точностью до порядка следования конституент нуля.

Пример 6.4.6. Найти СДНФ и СКНФ функции f(x,y,z), заданной следующей таблицей истинности:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
F(x,y,z)	1	0	0	1	0	1	0	1

По теореме о функциональной полноте СДНФ имеет вид $\varphi_1 = \overline{xyz} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz$, а СКНФ - $\varphi_2 = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.

Итак, для нахождения СДНФ и СКНФ исходной формулы φ составляется ее таблица истинности, а затем по ней строится требуемая совершенная нормальная форма.

В примере 6.4.6, имея, скажем, СДНФ φ_1 для функции f, можно составить ее таблицу истинности и по ней найти СКНФ φ_2.

Описанный способ нахождения СДНФ и СКНФ по таблице истинности бывает часто более трудоемким, чем следующий алгоритм.

Для нахождения СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ, а затем преобразовываем ее конъюнкты в конституенты единицы с помощью следующих действий:

а) если в конъюнкт входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем этот конъюнкт из ДНФ;

б) если в конъюнкт одна и та же литера x^{δ} входит несколько раз, то удаляем все литеры x^{δ}, кроме одной;

в) если в некоторый конъюнкт $x_1^{\delta_1},...,x_k^{\delta_k}$ не входит переменная y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу $x_1^{\delta_1},...,x_k^{\delta_k} \wedge (y \vee \bar{y})$ и, применяя закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ; если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида $(y \vee \bar{y})$;

г) если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них. В результате получается СДНФ.

Пример 6.4.7. Найдем СДНФ для ДНФ $\varphi = x\bar{x} \vee x \vee yzy$. Имеем $\varphi \sim$

$$x \vee yz \sim (x(y \vee \bar{y}) \vee yz(x \vee \bar{x})) \sim (xy \vee x\bar{y} \vee xyz \vee \bar{x}yz) \sim (xy(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xyz \vee \bar{x}yz) \sim$$

$$\sim (xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\overline{yz} \vee xyz \vee \bar{x}yz) \sim (xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\overline{yz} \vee \bar{x}yz)$$

Описание алгоритма приведения КНФ и СКНФ аналогично вышеизложенному описанию алгоритма приведения ДНФ к СДНФ и оставляется читателю в качестве упражнения.

Двухэлементная булева алгебра. Фактор-алгебра алгебры формул.

Рассмотрим множество $B_0=\{0,1\}$ и определим на нем операции $\vee$, $\wedge$, $-$ согласно таблицам истинности формул $x \wedge y$, $x \vee y$, $\bar{x}$. Тогда система $\mathcal{B}_0=\langle B_0,\wedge,\vee,-,0,1\rangle$ является двухэлементной булевой алгеброй. Формулы алгебры логики, содержащие лишь логические операции $\wedge$, $\vee$, $-$, являются термами в $\mathcal{B}_0$. По теореме о функциональной полноте в булевой алгебре $\mathcal{B}_0$ с помощью терма можно задать любую булеву функцию.

Обозначим через Φ_n множество всех формул алгебры логики с переменными из множества $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. На множестве Φ_n определены двухместные операции конъюнкции и дизъюнкции - $\wedge$: $(\varphi,\psi) \mapsto \varphi \wedge \psi$, $\vee$: $(\varphi,\psi) \mapsto \varphi \vee \psi$ - и одноместная операция отрицания $-$:$\varphi \mapsto \bar{\varphi}$. Выделим на множестве Φ_n две константы $x \wedge \bar{x}$ и $x \vee \bar{x}$. Тем самым получается алгебра формул $F_n=\langle \Phi_n,\wedge,\vee,-,x \wedge \bar{x},x \vee \bar{x}\rangle$. Нетрудно заметить, что отношение $\sim$ эквивалентности формул является конгруэнцией на алгебре F_n, и поэтому можно задать фактор-алгебру $F_n/\sim$. На фактор-множестве $\Phi_n/\sim$ операции $\wedge,\vee$ и определяются следующим образом: $\sim(\varphi)\wedge\sim(\psi)=\sim(\varphi\wedge\psi)$, $\sim(\varphi)\vee\sim(\psi)=\sim(\varphi\vee\psi)$, $\neg\sim(\varphi)=\sim(\neg\varphi)$. На множестве $\Phi_n/\sim$ выделяются две константы: $0=\sim(x\wedge\overline{x})$ и $1=\sim(x\vee\overline{x})$. Полученная система $<\Phi_n/\sim,\wedge,\vee,-,0,1>$ является фактор-алгеброй $F_n/\sim$.

Теорема 6.5.1. Фактор-алгебра $F_n/\sim$ изоморфна алгебре булевых функций B_n.

Доказательство. Искомый изоморфизм ξ: $F_n/\sim \tilde{\to} B_n$ определяется по следующему правилу: классу эквивалентности $\sim(\varphi)$ сопоставляется функция f_φ, имеющая таблицу истинности произвольной формулы из множества $\sim(\varphi)$. Поскольку разным классам эквивалентности соответствуют различные таблицы истинности, отображение ξ инъективно, а так как для любой булевой функции f из B_n найдется формула $\varphi\in\Phi_n$, представляющая функцию f, то отображение ξ сюръективно. Сохранение операций $\wedge,\vee,-,0,1$ при отображении ξ проверяется непосредственно.

По теореме о функциональной полноте каждой функции $f\in B_n$, не являющейся константой 0, соответствует некоторая СДНФ ψ, принадлежащая классу $\sim(\varphi)=\xi^{-1}(f)$ формул, представляющих функцию f. Возникает задача нахождения в классе $\sim(\varphi)$ дизъюнктивной нормальной формы, имеющей наиболее простое строение.

Минимизация булевых функций в классе ДНФ.

Каждая формула имеет конечное число вхождений переменных. Под вхождением переменной понимается место, которое переменная занимает в формуле. Задача заключается в том, чтобы для данной булевой функции f найти ДНФ, представляющую эту функцию и имеющую наименьшее число вхождений переменных.

Элементарным произведением называется конъюнкт, в который любая переменная входит не более одного раза.

Пример 6.6.1. Формула $x_2\overline{x_3}x_4$ - элементарное произведение, а формула $x_1x_2x_1\overline{x_3}$ элементарным произведением не является.

Пример 6.6.2. Найдем все импликанты и простые импликанты для формулы $\varphi(x,y)=x\to y$. Всего имеется 8 элементарных произведений с переменными x и y. Ниже приведены их таблицы истинности:

x	y	$\varphi=x\to y$	$\overline{xy}$	$\overline{x}\,y$	$x\overline{y}$	xy	$\overline{x}$	$\overline{y}$	x	Y
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1

Из таблиц истинности заключаем, что формулы $\overline{xy}, \overline{x}\,y, xy, \overline{x}, y$ - все импликанты формулы φ, а из этих ипликант простыми являются формулы $\overline{x}$ и y (формула $\overline{xy}$, например, не является простой импликантой, поскольку отбрасывая литеру $\overline{y}$, получаем импликанту $\overline{x}$).

Дизъюнкция всех простых импликант данной формулы (функции) называется сокращенной ДНФ.

Теорема 6.6.1. Любая булева функция, не являющаяся константой 0, представима в виде сокращенной ДНФ.

В примере 6.6.2 функция, соответствующая формуле $x \rightarrow y$, представима формулой $\overline{x} \vee y$, которая является ее сокращенной ДНФ.

Сокращенная ДНФ может содержать лишние импликанты, удаление которых не меняет таблицы истинности. Если из сокращенной ДНФ удалить все лишние импликанты, то получается ДНФ, называемая тупиковой.

Заметим, что представление функции в виде тупиковой ДНФ в общем случае неоднозначно.

Выбор из всех тупиковых форм формы с наименьшим числом вхождений переменных дает минимальную ДНФ (МДНФ).

Рассмотрим метод Квайна для нахождения МДНФ, представляющей данную булеву функцию. Определим следующие три операции:

- операция полного склеивания - $\varphi \cdot x \vee \varphi \cdot \overline{x} \sim \varphi\,(x \vee \overline{x}) \sim \varphi$;
- операция неполного склеивания - $\varphi \cdot x \vee \varphi \cdot \overline{x} \sim \varphi\,(x \vee \overline{x}) \vee \varphi \cdot x \vee \phi \cdot \overline{x} \sim \varphi \vee \varphi x \vee \varphi\,\overline{x}$;
- операция элементарного поглощения - $\varphi \cdot x^{\delta} \vee \varphi \sim \varphi$, $\delta \in \{0,1\}$.

Теорема 6.6.2. (теорема Квайна). Если методы из совершенной ДНФ функции произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ, то есть дизъюнкция всех простых импликант.

Пример 6.6.3. Пусть функция f(x,y,z) задана совершенной ДНФ φ= $\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee x\,\overline{y}\,z \vee xy\,\overline{z} \vee xyz$. Тогда, производя в два этапа все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, имеем

$$\varphi \sim \begin{array}{l} \overline{x}\,y(\overline{z} \vee z) \vee y\,\overline{z}(x \vee \overline{x}) \vee yz(x \vee \overline{x}) \vee xz(y \vee \overline{y}) \vee xy(z \vee \overline{z}) \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee x\,\overline{y}\,z \vee xy\,\overline{z} \vee \\ \vee\; xyz \sim \overline{x}\,y \vee y\,\overline{z} \vee yz \vee xz \vee xy \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee x\,\overline{y}\,z \vee xy\,\overline{z} \vee xyz \sim y(\overline{x} \vee x) \vee y(z \vee \overline{z}) \vee \\ \vee\; \overline{x}\,y \vee y\,\overline{z} \vee yz \vee xz \vee xy \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee x\,\overline{y}\,z \vee xy\,\overline{z} \vee xyz \sim y \vee \overline{x}\,y \vee y\,\overline{z} \vee yz \vee xz \vee xy \vee \\ \vee\; \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee x\,\overline{y}\,z \vee xy\,\overline{z} \vee xyz \sim y \vee xz \end{array}$$

Таким образом, сокращенной ДНФ функции f является формула $y \vee xz$.

На практике при выполнении операций неполного склеивания на каждом этапе можно не писать члены, участвующие в этих операциях, а писать только результаты всевозможных полных склеиваний и конъюнкты, не участвующие ни в каком склеивании.

Пример 6.6.4. Пусть функция f(x,y,z) задана совершенной ДНФ φ= $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee x\bar{y}z\vee xyz$. Тогда, производя операции склеивания, а затем элементарного поглощения, имеем φ~ $\bar{x}\bar{y}(z\vee\bar{z})\vee\bar{y}z(\bar{x}\vee x)\vee xz(\bar{y}\vee y)\sim\bar{x}\bar{y}\vee\bar{y}z\vee xz$.

Для получения минимальной ДНФ из сокращенной ДНФ используется матрица Квайна, которая строится следующим образом. В заголовках столбцов таблицы записываются конституенты единицы совершенной ДНФ, а в заголовках строк – простые импликанты из полученной сокращенной ДНФ. В таблице звездочками отмечаются те пересечения строк и столбцов, для которых конъюнкт, стоящий в заголовке строки, входит в конституенту единицы, являющейся заголовком столбца.

Для примера 6.6.4 матрица Квайна имеет вид

Импликанты	Конституенты единицы			
	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$x\bar{y}z$	xyz
$\bar{x}\bar{y}$	*	*		
$\bar{y}z$		*	*	
xz			*	*

В тупиковую ДНФ выбирается минимальное число простых импликант, дизъюнкция которых сохраняет все конституенты единицы, то есть каждый столбец матрицы Квайна содержит звездочку, стоящую на пересечении со строкой, соответствующей одной из выбранных импликант. В качестве минимальной ДНФ выбирается тупиковая, имеющая наименьшее число вхождений переменных.

В примере 6.6.4 по матрице Квайна находим, что минимальная ДНФ заданной функции есть $\bar{x}\bar{y}\vee xz$.

В силу принципа двойственности для булевых алгебр все приведенные понятия и рассуждения очевидным образом можно преобразовать для нахождения минимальных конъюнктивных нормальных форм (МКНФ).

Карты Карно.

Другой способ получения простых импликант формул с малым числом переменных (и, значит, нахождения с помощью матрицы Квайна минимальной ДНФ) основан на использовании так называемых карт Карно.

Карта Карно для n переменных служит эффективным средством иллюстративного представления n-куба. Она содержит 2^n ячеек, каждая из которых соответствует одной из 2^n возможных комбинаций значений n логических переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Карта строится в виде матрицы размера

2^{n-k} на 2^k так, что ее столбцы соответствуют значениям переменных $x_1,\dots,x_k$, строки – значениям переменных $x_{k+1},\dots,x_n$, а соседние ячейки (как по вертикали, так и по горизонтали) отличаются только значением одной переменной (рис.6.5).

На рисунке 6.6 приведены карты Карно для функций трех и четырех переменных соответственно. В этих картах все ячейки, отмеченные скобкой x_i (по строке и столбцу), представляют входные комбинации с $x_i=1$, а в неотмеченных строках и столбцах ячейки соответствуют комбинациям с $x_i=0$ (см.рис.6.6а, на котором разными способами изображена одна и та же карта). Например, на рисунке 6.6а ячейка a соответствует набору 001 значений переменных x_1,x_2,x_3. Отметим, что для каждой функции может быть построено несколько различных карт. На рисунке 6.6б изображены две карты Карно для функции четырех переменных. Первая карта соответствует разбиению переменных $\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\}$, а вторая – $\{\{x_1\},\{x_2,x_3,x_4\}\}$.

У каждой вершины n-куба есть ровно n смежных с ней вершин, то есть вершин, отличающихся от нее только одной координатой. Поскольку в карте Карно каждая ячейка может иметь не более четырех ячеек, соседних по строке или столбцу, для представления точек, отличающихся только на одну координату, необходимо использовать и более удаленные ячейки. Например, точки b и c на рисунке 6.6б отличаются только значением переменной x_3, то есть являются смежными.

	00…0	00…1	$\dots x_1 \dots x_k \dots$	10…0
00…0			…	
00…1			…	
… $x_{k+1}\dots x_k$ …	…	…	…	…
10…0			…	

Рисунок 6.5

Рисунок 6.6а

X_1x_2					
		00	01	11	10
X_3	0				
	1				

			X_1	
X_3	a			
		X_2		

Рисунок 6.6б

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">X$_1$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>B</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">X$_4$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">X$_3$</td></tr>
<tr><td></td><td>c</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">X$_2$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>X$_1$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D</td><td rowspan="2">X$_4$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">X$_3$</td><td>E</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="4">X$_2$</td><td></td></tr>
<tr><td>f</td><td rowspan="2">X$_4$</td></tr>
<tr><td></td><td>g</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Булева функция может быть представлена на карте Карно выделением 1-ячеек (то есть ячеек, в которых функция принимает значение, равное 1). Подразумевается, что необозначенные ячейки соответствуют 0-точкам.
На рисунке 6.7 изображена картина, представляющая булеву функцию f(x,y,z), для которой f(0,0,0)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=f(1,0,1)=0, f(0,1,0)=f(1,0,0)=f(0,0,1)=f(0,1,1)=1.

Для построения импликант берутся всевозможные наборы 1-ячеек, образующих вершины некоторого k-куба (то есть 2^k точек таких, что пары соседних отличаются ровно одной координатой). Совпадающие координаты образуют набор ($\delta_1,\ldots,\delta_{n-k}$), и требуемая импликанта имеет вид $x_{i_1}^{\delta_1}\ldots x_{i_{n-k}}^{\delta_{n-k}}$, где x_j – переменная, соответствующая значению δ_j.

Рисунок 6.7

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">X$_1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>X$_3$</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">X$_2$</td><td></td></tr>
</table>

Пример 6.7.1 Точка b и c на рисунке 6.6б лежат в 1-кубе, который определяет конъюнкт $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$. Точки {d,e,f,g} образуют 2-куб, представляющий импликанту x_1x_4.

Определение простых импликант функции сводится к нахождению всех k-кубов, которые не содержатся в кубах более высокого порядка.

Пример 6.7.2. Простые импликанты для карты Карно, приведенной на рисунке 6.7, равны $\bar{x}_1x_2, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1x_3$.

Пример 6.7.3. На рисунке 6.8 показана карта Карно, простые импликанты которой имеют вид $x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}, x_1x_2\overline{x_3}, x_1\overline{x_3}x_4, x_1\overline{x_2}x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_4}, \overline{x_1}x_3$. Заметим, что импликанты

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3, \overline{x_1}x_2x_3, \overline{x_1}x_3x_4 u \overline{x_1}x_3\overline{x_4}$ не являются простыми, так как образуемые ими 1-кубы содержатся в 2-кубе $\overline{x_1}x_3$.

После нахождения простых импликант задача построения минимальной ДНФ сводится к изучению матрицы Квайна, как показано в параграфе 6.6. При наглядном размещении простых импликант в карте Карно удается непосредственно находить минимальную ДНФ, выбирая те простые импликанты, которые покрывают все единицы и имеют наименьшее возможное число вхождений переменных. Так, минимальной ДНФ для функции, изображенной на рисунке 6.8, является формула $x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_4 \vee \overline{x_1}x_3$.

Принцип двойственности для булевых функций.

Двойственность в классе булевых алгебр проявляется в том, что на множестве B со структурой булевой алгебры *B* можно ввести структуру двойственной алгебры B^+, в которой роль операции $\wedge$ играет $\vee$, роль операции $\vee$ - $\wedge$, а в качестве нуля (единицы) используется 1 (соответственно 0). При этом между алгебрами *B и* B^+ имеется изоморфизм $\varphi: x \mapsto \overline{x}$. В этом параграфе мы рассмотрим соответствие булевых функций при изоморфизме φ.

Функция $f^+(x_1,\dots,x_n)$ называется двойственной по отношению к функции $f(x_1,\dots,x_n)$,

если $f^+(x_1,\dots,x_n)=\overline{f(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})}$.

Двойственная функция получается из исходной при замене значений всех переменных, а также значений функции на противоположные, то есть в таблице истинности нужно заменить 0 на 1, а 1 на 0.

Пример 6.8.1. Двойственной к функции $x\wedge y$ является функция, соответствующая формуле $\neg(\overline{x}\wedge\overline{y})$, то есть $\neg\neg(x\vee y)$ или $x\vee y$:$(x\wedge y)^+=x\vee y$. Аналогично $(x\vee y)^+=x\wedge y$, $(\overline{x})^+=\overline{x}$.

Принцип двойственности. Если $f(x_1,\dots,x_n)=g(h_1(x_1,\dots,x_n),\dots,h_m(x_1,\dots,x_n))$, то $f^+(x_1,\dots,x_n)=g^+(h_1^+(x_1,\dots,x_n),\dots,h_m^+(x_1,\dots,x_n))$.

Таким образом, функция, двойственная суперпозиции функций, есть соответствующая суперпозиция двойственных функций.

Принцип двойственности удобен при нахождении двойственных функций, представленных формулами, содержащими лишь конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. В этом случае в исходной формуле конъюнкции заменяются на дизъюнкции, а дизъюнкции – на конъюнкции. Таким образом, ДНФ соответствует КНФ, КНФ – ДНФ, СДНФ – СКНФ, СКНФ – СДНФ.

Пример 6.8.2. $(xy\vee \overline{x}\,\overline{z}\vee \overline{x}\,y\,\overline{z})^{+}=(x\vee y)\wedge(\overline{x}\vee \overline{z})\wedge(\overline{x}\vee y\vee \overline{z})$.

Отметим, что если формула φ эквивалентна формуле ψ: φ~ψ, то $\varphi^{+}\sim\psi^{+}$.

Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется самодвойственной, если $f^{+}(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)$.

Пример 6.8.3. Покажем, что формула $\varphi=xy\vee xz\vee yz$ задает самодвойственную функцию.

С этой целью убедимся, что на всех противоположных наборах значений переменных $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ и $(1-\delta_1,1-\delta_2,1-\delta_3)$ формула принимает противоположные значения. Действительно, составив таблицу истинности

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
φ	0	0	0	1	0	1	1	1

Получаем $\varphi(0,0,0)=\overline{\varphi(1,1,1)},\ \varphi(0,0,1)=\overline{\varphi(1,1,0)},\ \varphi(0,1,0)=\overline{\varphi(1,0,1)},\ \varphi(0,1,1)=\overline{\varphi(1,0,0)}$.

Основы комбинаторики.

Комбинаторика (или комбинаторный анализ) – раздел математики, объектом исследования которого являются дискретные множества произвольной природы. «Комбинаторным», то есть тем, что можно исследовать методами комбинаторики является определение числа способов выполнения некоторых точно определенных операций, или, другими словами, определение числа подчиненных тем или иным условиям комбинаций, которые можно составить из заданной совокупности объектов. В настоящее время комбинаторные методы широко используются в таких отраслях научного значения, как теория вероятностей, математическая статистика, теория алгоритмов, кодирования и распознавания образов, математическое программирование, лингвистика и др.

Основные теории комбинаторики.

Подмножества и выборки

Пусть задано произвольное множество из n объектов, которое мы обозначим за А, с элементами a_i. Последовательность произвольных элементов $\langle a_1, a_2, \ldots, a_i \rangle$, $a_i \in A$, $i=\overline{1,r}$ называется выборкой объема r из А, причем каждый элемент из множества А может встречаться в выборке произвольное число раз. Объем выборки может превосходить объем исходного множества А. Если же все компоненты r-выборки из n-множества А различны, то $r \le n$ и r-выборка представляет собой r-подмножество А.

Если свойства выборки изменяются при транспозиции элементов (то есть при перемене местами двух элементов), то выборка называется упорядоченной, в противном случае – неупорядоченной. Число появлений одного и того же элемента а называется его кратностью и обозначается $\chi(a)$. Типичным примером выборки может являться слово в фиксированном алфавите.

Следовательно, если каждый элемент a_i m-выборки имеет кратность $\chi(a_i)=1$, $i=\overline{1,m}$, то выборка является просто m-подмножеством множества А. При этом упорядоченное m-подмножество n-множества называется m-перестановкой из n-элементов (или размещением из n элементов по m). Неупорядоченное m-подмножество n-множества называется m-сочетанием из n элементов (или сочетанием из n элементов по m).

Теорема о числе упорядоченных подмножеств

Число $A_{n,m}$ упорядоченных m-подмножеств n-множества равно:

$A_{n,m}=n(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-m+1)$, $m=\overline{1,n}$.

Доказательство. Первый элемент m-подмножества может быть выбран из n-множества n способами. Поскольку все элементы подмножества различны, то в каждой из выборок первого элемента второй его элемент может быть выбран n-1 способами. В каждой из этих выборок третий элемент может быть выбран n-2 способами и т.д. Продолжив аналогичные рассуждения, получим утверждение теоремы.

Пример. Сколько слов, состоящих из четырех различных букв, можно составить из данных шести букв: а, в, к, л, о, с?

Поскольку в задаче нет ограничений на порядок данных букв в слове, то на первое место можно поставить любую букву (6 вариантов), на второе место можно поставить любую букву, кроме установленной на первое место (5 вариантов) и т.д. Теперь очевидно, что таких слов будет $A_{6,4}=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$.

Следствие. Если m=n, то число таких подмножеств есть: $P_n=A_{n,n}=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots 2\times1\equiv n!$, то есть равно произведению всех первых n натуральных чисел. «n!» читается: «n-факториал».

Пример. Сколько вариантов расположения слов допускает предложение: «Редактор вчера внимательно прочитал рукопись»?

Так как в данном предложении нет никаких грамматических ограничений на порядок слов, то на первое место можно поставить любое слово (5 вариантов), на второе любое другое, кроме выбранного (4 варианта) и т.д. Всего $P_5=5\times4\times3\times2\times1=120$.

Размещения из n элементов по n называются перестановками. Чтобы показать очень быстрый рост числа перестановок с ростом числа n, сравним числа 6!, 8! и 10!. Вычисляя, получим: $6\times5\times4\times3\times2\times1=6!=720$; $8!=40320$; $10!=3628800$.

Если рассматривается произведение первых натуральных только четных или только нечетных чисел, то такие произведения называются двойными факториалами обозначаются так: $2k\times(2k-2)\ldots6\times4\times2\equiv(2k)!!$; $(2k+1)\times(2k-1)\ldots5\times3\times1\equiv(2k+1)!!$

Теорема о числе упорядоченных выборок

Число $\overline{A_{n,m}}$ упорядоченных m-выборок из n-множеств равно: $\overline{A_{n,m}} = n^m, m \le n$.

Доказательство. В отличие от m-множеств, в m-выборке n-множества элементы могут иметь произвольную кратность χ, то есть $0\le\chi(a_i)\le m$, $i=\overline{1,n}$, так как любой элемент n-множества может встретиться в выборке от 0 до m раз.

Повторяя рассуждения предыдущей теоремы и учитывая, что в рассматриваемом случае число способов выбора каждого из элементов n-множества не зависит от выбора остальных элементов и равно n, получим доказываемое утверждение.

Повторим, что выборки подразумевают возможность наличия в них одинаковых элементов, а подмножество не допускает повторений элементов. Для отличия подмножеств от выборок в формулах для выборок введем подчеркивание сверху.

Пример. Сколько всего телефонных номеров можно иметь в городе, если номер имеет шесть цифр?

Каждый телефонный номер может содержать любые шесть цифр из десяти (0,1,2,…,9). При этом одинаковые цифры могут повторяться до шести раз, и, кроме того, телефонные номера различны, даже если они отличаются лишь порядком цифр. На основании этого задача сводится к подсчету количества 6-выборок 10-множества, то есть: $\overline{A_{10,6}} = 10^6$.

Теорема о числе неупорядоченных подмножеств

Число $C_{n,m}$ неупорядоченных m-подмножеств n-множества равно:

$C_{n,m}=\frac{A_{n,m}}{P_m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}, m=\overline{1,n}$.

Доказательство. Согласно теореме о числе упорядоченных подмножеств, число упорядоченных m-подмножеств n-множества равно $A_{n,m}$. На основании следствия к этой теореме каждое m-подмножество может быть упорядочено P_m=m! способами. Поэтому если пренебречь порядком элементов, то получаем формулу (2.1). Числа $C_{n,m}$ обычно называют биномиальными коэффициентами.

Пример. Читатель отобрал по каталогу 8 книг. Однако в библиотеке выдают одному читателю не более 5 книг. Сколько альтернатив взять книги есть у этого читателя?

Решение. Поскольку читатель отобрал книг больше разрешенного числа, то он должен выбрать из них 5 книг. Естественно, что все книги разные и все равно в каком порядке их взять. Следовательно, каждая альтернатива есть неупорядоченное 5 – подмножество из 8 и число вариантов в выборе книг (число альтернатив) равно $C_{8,5}=\frac{8!}{5!3!}=56$.

Теорема о числе неупорядоченных выборок

Число неупорядоченных m-выборок из n-множества равно:

$$\overline{C_{n,m}}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}, m\le n .$$

Доказательство. Пусть элементами исходного n-множества B являются первые натуральные числа 1,2,…,n. Тогда всякая m-выборка $\langle b_1,b_2,\dots,b_m\rangle$ (2.2) может быть ранжирована так, чтобы $b_1\le b_2\le\dots\le b_m$.

Пусть теперь D есть (n+m-1) – множество натуральных чисел 1,2,…,n+m-1. Тогда совокупность натуральных чисел $(b_1+0, b_2+1,\dots,b_m+m-1)$ (2.3) представляет собой m-подмножество множества D. Между выборкой (2.2) и множеством (2.3) существует взаимно однозначное соответствие, следовательно, число $\overline{C_{n,m}}$ неупорядоченных m-подмножеств множества B_n равно числу $C_{n+m-1,m}$ неупорядоченных m-подмножеств (n+m-1)-множества D, которое, согласно предыдущей теореме, определяется равенством:

$$\overline{C_{n,m}}=C_{n+m-1,m}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} .$$

Пример. Кости домино можно рассматривать как сочетания с повторениями по два из семи цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Число всех таких сочетаний равно: $\overline{C_{7,2}}=\frac{(7+2-1)!}{2!(7-1)!}=\frac{8!}{2!6!}=28$.

Набор целых чисел $(n_1,n_2,\dots,n_k)$ называется разбиением числа n, если $n=n_1+n_2+\dots+n_k$, например, 6=1+2+3.

Теорема о числе разбиений

Число $R(n:n_1,n_2,\ldots,n_k)$ упорядоченных $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$-разбиений n-множества равно:

$$R(n:n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!},\sum_{i=1}^{k} n_i = n \quad (2.4)$$

Доказательство. Очевидно, что существует всего одно неупорядоченное (1,1,…,1)-разбиение n-множества на n штук 1-подмножества. Любая транспозиция приводит к новому упорядоченному разбиению. Поэтому число упорядоченных (1,1,…,1)-разбиений n-множества равно n!.

Если же в первое из подмножеств входит n_1 элементов, то число $(n_1,1,\ldots,1)$-разбиений n-множеств будет равно $n!/n_1!$, так как транспозиция элементов, входящих в n_1-подмножество, не приводит к новому упорядоченному разбиению. Если, кроме того, второе подмножество включает в себя n_2 элементов, то по указанным выше причинам число $(n_1,n_2,1,\ldots,1)$-разбиений n-множества равно $n!/(n_1!n_2!)$. Повторив подобные рассуждения k раз, придем к формуле (2.4).

Замечание. Числа R в (2.4) называют также полиномиальными коэффициентами. Это название обусловлено тем, что они являются коэффициентами при произведениях степеней переменных $x_1,x_2,\ldots,x_k$ в разложении полинома по степеням x_i:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}.$$

В частном случае, когда $x_1=x_2=\ldots=x_k=1$, имеем важное соотношение:

$$k^n=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Следствие. Число (m,n-m)-разбиений n-множества равно числу его упорядоченных m-подмножеств. Это следует из сравнения формул (2.1) и (2.4):

$$R(n:m,n-m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}=C_{n,m}, m=\overline{1,n} \quad (2.5)$$

Пример. Число различных слов, которое получим, переставляя буквы слова «математика», равно: $R(10:2,3,2,1,1,1)=\frac{10!}{2!3!2!1!1!1!}=151200$, так как кратность буквы м равна двум, а – трем, т – двум, остальные буквы встречаются по одному разу.

Теорема о числе неупорядоченных подмножеств

Число N_n всех неупорядоченных подмножеств n-множества равно: $N_n=2^n$.

Доказательство. Согласно теореме 3, число неупорядоченных m-подмножеств n-множества равно: $C_{n,m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Приняв во внимание формулу для полиномиальных коэффициентов, получим при k=2:

$N_n=\sum_{m=0}^{n} C_{n,m} = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример. В комнате 4 различных светильника. Сколько вариантов включения светильников может быть реализовано?

Так как в задаче речь идет лишь о том, горит светильник или нет, то мы рассматриваем неупорядоченные разбиения, то есть применима формула $N_4=2^4=16$ (вариантов).

Основные правила комбинаторики

Правило суммы

Пусть существует разбиение множества изучаемых комбинаций на классы, то есть каждая комбинация входит в один и только в один класс. Тогда полное число комбинаций равно сумме количества комбинаций, входящих в каждый из классов.

Иными словами, если некоторый объект типа a можно выбрать m способами, а объект типа b можно выбрать n способами, то выбор одного из этих объектов можно осуществить N_1 способами: $N_1=m+n$ (2.6)

Это правило сумм справедливо лишь в том случае, если классы разбиения не пересекаются. Если же классы разбиения пересекаются, то есть способы выбора объекта типа a совпадают со способами выбора объекта типа b, то из формулы (2.6) следует вычесть число k таких совпадений: $N_1^{/}=m+n-k$ (2.7)

Пример. Пусть a – число, делящееся на два; b – число, делящееся на три. Сколькими способами можно выбрать или a, или b, если задано множество $M_5=\{1,2,3,4,5\}$?

Решение. Согласно формуле (2.6) имеем: m=2 (числа 2 и 4) и n=1 (число 3), то есть $N_1=2+1=3$.

Если подобный выбор осуществляется из множества $M_6=\{1,2,3,4,5,6\}$, то необходимо использовать уже формулу (2.7), так как 6 делится и на 2, и на 3: $N^{/}=3+2-1=4$.

Обобщая формулы (2.6) и (2.7) на случай i классов, получим формулу сумм:

$N_1=\sum_{i=1}^{r} n_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} k_{ij}$, где n_i – число способов выбора объектов i-го типа; k_{ij} – число совпадений способов выбора объектов I-го и j-го типа.

Правило произведения.

Если объект типа a можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект типа b можно выбрать n способами, то выбор в указанном порядке пары <a,b> можно осуществить N_2 способами: $N_2=m\cdot n$.

Действительно, если n – число способов выбора объекта типа b не зависит от того, как выбран объект типа a, то каждый из m способов выбора a может быть скомбинирован с n способами выбора b, а это и приводит к mn способам выбора пары <a,b>.

Если же при I-ом способе выбора объекта типа a объект b может быть выбран n_i способами, то число $N_2^{/}$ способов такого выбора пары <a,b> равно: $N_2^{/}=\prod_{i=1}^{n} n_i$.

Пример. Сколько существует целых четырехзначных чисел, не делящихся на 5?

Целое число не делится на 5, если оно не заканчивается на 5 или на 0. Поэтому первую значащую цифру можно выбирать девятью способами (все цифры, кроме нуля), вторую и третью – десятью способами, а четвертую – лишь восемью (все цифры, кроме 0 и 5). Следовательно, искомое число есть: $N_2=\prod_{i=1}^{4} n_i = 9\cdot 10\cdot 10\cdot 8 = 7200$, где $n_1=9$, $n_2=n_3=10$, $n=8$.

Комбинация объектов

Размещения

Размещения – это соединения из n элементов по m, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо их порядком. Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m и равно числу m-подмножеств исходного n-множества. Таким образом, на основании теоремы о числе упорядоченных подмножеств, имеем:

$A_n^m=A_{n,m}=n(n-1)\ldots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Величина $A_{n,m}$ принимается равной единице, хотя она и не имеет комбинаторного смысла. Кроме того, по определению $A_0^0=1$ и $A_n^m=0$ при значении $n<m$ или если $m<0$, а $n>0$.

Имеет место рекуррентное (возвратное) соотношение: $A_n^m=A_{n-1}^m+mA_{n-1}^{m-1}$ (2.8)

Действительно, разобьем множество m-размещений из n элементов на два класса. Пусть в первом классе отсутствует один определенный элемент, тогда число размещений в этом классе будет A_{n-1}^m. В каждом из размещений второго класса этот элемент присутствует и занимает одно из m мест. Поэтому при его включении в не содержащие его (m-1)-размещения получается A_{n-1}^{m-1} размещений, в каждое из которых этот элемент входит.

Перестановки

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначается P_n и равно частному случаю – числу размещений из n элементов по n, то есть: $P_n=A_n^n=\dfrac{n!}{0!}=n!$, так как по определению $0!\equiv 1$.

Подсчет P при больших значениях n становится затруднительным. В этих случаях можно рекомендовать использовать приближенную формулу Стирлинга:

$$n!=(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+...).$$

Сочетания

Сочетания – это соединения из n элементов по m элементов, которые отличаются друг от друга только самими элементами.

Согласно определению, m-сочетания представляют собой неупорядоченные m-подмножества из n-подмножества, и, согласно теореме п.2.3.1.4, их число определяется равенством так:

$$C_n^m=C_{n,m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{A_n^m}{P_m}.$$

Если в этой формуле заменить m на разность n-m, то получим соотношение: $C_n^m=C_n^{n-m}$.

Проводя рассуждения аналогичные сделанным при доказательстве формулы (2.8), можно получить рекуррентную формулу для сочетаний C_n^m: $C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$.

Принято считать, что $C_0^0=1$; $C_n^m=0$ при $n<m$ или при $m<0$ и $n>0$.

Числа C_n^m часто условно записывают в следующем виде: $\binom{m}{n}$.

Хотя величина не имеет комбинаторного смысла, понятие чисел можно распространить на отрицательные значения n, а именно: $C_{-n}^m=(-1)^m C_{n+m-1}^m$.

Пример. Абонент забыл последние три цифры телефонного номера. Какое наибольшее число вариантов номеров ему нужно перебрать, чтобы дозвониться (в этом случае необходимый номер набирается последним)?

Очевидно, что таких номеров столько, сколько можно составить размещений из десяти цифр по три, то есть: $N_1=A_{10}^3=720$.

Пример. Требуется составить колонну из пяти автомашин. Сколькими способами это можно сделать?

По условиям задачи порядок следования автомобилей может быть любым, поэтому количество способов составить автоколонну из пяти машин есть число перестановок из пяти: $N_2=P_5=125$.

Размещения с повторениями.

Размещения с повторениями – это упорядоченные m-выборки из n-множества. Таких выборок, согласно теореме 5.2, будет $\overline{A_n^m}=\overline{A_{n,m}}=n^m$ штук.

Перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями – это упорядоченные разбиения n-множества $(n:n_1,n_2,\ldots,n_k)$. На основании формулы (2.4) имеем:
$\overline{P_{n:n_1,n_2,\ldots,n_k}} = R(n:n_1n_2\ldots n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$, где n_i – число повторений в перестановке элементов I-го типа.

Очевидно, что $\overline{P_{n:1,1,\ldots,1}} = P_n = n!$.

Пример. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «перепел»?

Решение. Поскольку в слове имеются три буквы е и две буквы п, перестановки будут происходить с повторениями. Поэтому искомое число есть: $\overline{P_{7:3,2,1,1}} = \dfrac{7!}{3!2!1!1!} = 420$.

Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями – это неупорядоченные m-выборки из n-множества. Поэтому число таких сочетаний, согласно теореме о числе неупорядоченных выборок, равно: $\overline{C_n^m} = \overline{C_{n,m}} = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m$.

Имеет место также следующее рекуррентное соотношение:
$C_n^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Пример. Число целых неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ равно числу сочетаний из m элементов по n элементов с повторениями. Это, в частности, означает, что уравнение $x_1+x_2+x_3=5$ имеет $C_{5+4-1}^5=C_8^5=56$ решений.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Виды и способы задания графов.

Во многих прикладных задачах изучаются системы связей между различными объектами. Объекты называются вершинами и отмечаются точками, а связи между вершинами называются дугами и отмечаются стрелками между соответствующими точками (рис.4.1).

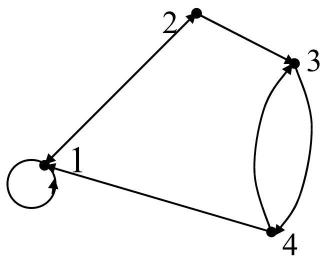


Рисунок 4.1.

Такие системы и образуют графы. Граф может изображать сеть улиц в городе: вершины графа – перекрестки, а дуги – улицы с разрешенным направлением движения (улицы могут быть с односторонним и двусторонним движением). В виде графов можно представить блок-схемы программ (вершины – блоки, а дуги – разрешенные переходы от одного блока к другому), электрические цепи, географические карты и молекулы химических соединений, связи между людьми и группами людей. Перейдем к точным определениям.

Графом называется алгебраическая система G=<M,R>, где R – двухместный предикатный символ. Элементы носителя M называются вершинами графа G, а элементы бинарного отношения $R\subseteq M^2$ – дугами. Таким образом, дугами являются пары вершин $(a,b)\in R$. При этом дуга (a,b) называется исходящей из вершины a и заходящей в вершину b.

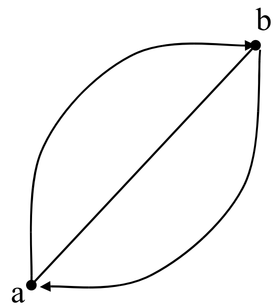
Изображение графа G=<M,R> получается путем разложения различных точек на плоскости для каждой вершины $a\in M$, причем если $(a,b)\in R$, то проводится стрелка (дуга) из вершины a к вершине b.

Пример 4.4.1. Изображение графа G с множеством вершин M={1,2,3,4} и множеством дуг R={(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,3),(4,1)} представлено на рисунке 4.1.

При задании графа для нас не имеет значения природа связи между вершинами a и b, важно только то, что связь существует и информация о связях содержится во множестве дуг R. Однако, часто возникают ситуации, при которых такой информации оказывается недостаточно, например, в случаях, когда имеется несколько дуг, исходящих из вершины a и заходящих в вершину b, такие дуги называют кратными (рисунок 4.2). Тогда используется понятие мультиграфа.

Мультиграфом G называется тройка <M,U,P>, в которой M – множество вершин, U – множество дуг, а $P\subseteq M\times U\times M$ – трехместный предикат, называемый инцидентором и представляемый следующим образом: $(a,u,b)\in P$ тогда и только тогда, когда дуга u исходит из вершины a и заходит в вершину b. Отметим, что любой граф можно представить в виде мультиграфа.

Граф $G=\langle M,R\rangle$ называется ориентированным (орграфом), если найдется дуга $(a,b)\in R$ такая, что $(b,a)\notin R$. Если же отношение R симметрично, то есть из $(a,b)\in R$ следует $(b,a)\in R$, то граф G называется неориентированным (неорграфом). Если одновременно пары (a,b) и (b,a) принадлежат R (рисунок 4.3а), то информацию об этих дугах можно представить множеством $[a,b]=\{(a,b),(b,a)\}$, называемым ребром, которое соединяет вершины a и b. При этом вершины a и b называются концами ребра $[a,b]$. Ребра изображаются линиями (без стрелок), соединяющими вершины (рисунок 4.3б).



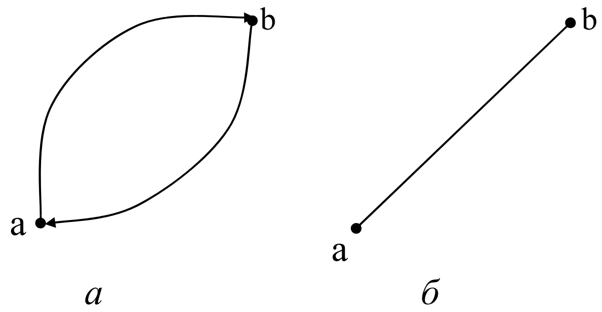


Рисунок 4.2

Рисунок 4.3

Если в мультиграфе вместо дуг рассматриваются ребра, то мультиграф также называется неориентированным. Отметим, что если в орграфе $G=\langle M,R\rangle$ к каждой дуге $(a,b)\in R$ добавить пару (b,a), то в результате образуется неорграф, который будем называть соответствующим данному орграфу G и обозначать через $F(G)$.

Пример 4.1.2. Орграфу G, изображенному на рисунке 4.1, соответствует неорграф $F(G)$, изображенный на рисунке 4.4.

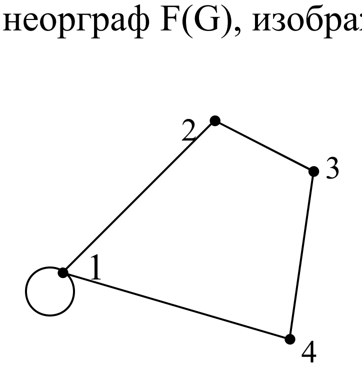


Рисунок 4.4.

Понятия морфизмов алгебраических систем для графов представляются следующим образом. Пусть $G=\langle M,R\rangle$, $G'=\langle M',R'\rangle$ - графы. Тогда отображение φ: $M \to M^{/}$ является гомоморфизмом, если для любых вершин $a,b \in M$ из $(a,b) \in R$ следует $(\varphi(a),\varphi(b)) \in R^{/}$. Биекция φ: $M \leftrightarrow M^{/}$ является изоморфизмом графов, если $(a,b) \in R \Leftrightarrow (\varphi(a),\varphi(b)) \in R^{/}$.

Пример 4.1.3. Рассмотрим граф G, состоящий из множества вершин {1,2,3,4} и множества дуг {[1,2],(1,3),(2,4)(3,2),[3,4],(4,1)} (рисунок 4.5а). Граф $G^{/}$=<{a,b,c},{[a,b],(a,c),(b,b),[b,c]}> является гомоморфным образом графа G при гомоморфизме φ, в котором $\varphi(1)=a$, $\varphi(2)=b$, $\varphi(3)=c$, $\varphi(4)=b$ (рисунок 4.5б). Граф $G^{//}$, показанный на рисунке 4.5в, изоморфен графу G посредством изоморфизма ψ, при котором $\psi(1)=a$, $\psi(2)=b$, $\psi(3)=c$, $\psi(4)=d$. Отображение χ: $\{1,2,3,4\} \leftrightarrow \{1,2,3,4\}$, при котором $\chi(1)=2$, $\chi(2)=1$, $\chi(3)=4$, $\chi(4)=3$, является автоморфизмом графа G.

Информация о структуре графа может быть задана матрицей бинарного отношения. Пусть G=<M,R> - граф, в котором множество вершин имеет n элементов: $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Матрицей смежности $A_G=(A_{ij})$ графа G называется матрица порядка n, определенная следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, если (a_i,a_j) \in R, \\ 0, если (a_i,a_j) \notin R. \end{cases}$$

Если $A_{ij}=1$, то вершина a_j называется последователем вершины a_i, а a_i – предшественником a_j. Вершины a_i и a_j называются смежными, если $A_{ij}=1$ или $A_{ji}=1$.

Если G – мультиграф, то в матрице смежности A_G элемент A_{ij} по определению равен числу дуг, исходящих из вершины a_i и заходящих в вершину a_j ($i,j \in \{1,\ldots,n\}$).

Пример 4.1.4. Граф G, изображенный на рисунке 4.6, имеет матрицу смежности

$$A_G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если G – неорграф, то матрица смежности A_G симметрична, то есть не меняется при транспонировании: $A_G^T=A_G$.

Петлей в графе G называется дуга, соединяющая вершину саму с собой. Если G – граф без петель, то в матрице смежности A_G по главной диагонали стоят нулевые элементы:

$$A_G=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & * \\ & & \cdots & \\ & * & & \cdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть G_1=<M_1,R_1>, G_2=<M_2,R_2> - графы, в которых $M_1=\{a_1,\ldots,a_n\}$, $M_2=\{b_1,\ldots,b_n\}$. Если φ - изоморфизм графов G_1 и G_2, действующий по правилу $\varphi(a_i)=b_i$, i=1,…,n, то матрицы смежности A_{G1} и A_{G2} совпадают. В общем случае справедлива

Теорема 4.1.1. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов (то есть одновременно с перестановкой I-й и j-й строк переставляются I-й и j-й столбцы).

Согласно этой теореме по матрице смежности граф восстанавливается однозначно с точностью до изоморфизма.

В мультиграфе G=<M,U,P> дуга $u\in U$ называется инцидентной вершине $a\in M$, если $(a,u,b)\in P$ или $(b,u,a)\in P$ для некоторого $b\in M$. Если $M=\{a_1,\ldots,a_m\}$, $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$, то матрицей инцидентности $B_G=(B_{ij})$ мультиграфа G называется матрица размера $m\times n$, определяемая по следующему правилу:

$$B_{ij}=\begin{cases} 1, \textit{если дуга } u_j \textit{ исходит из вершины } a_i; \\ -1, \textit{если дуга } u_j \textit{ заходит в вершину } a_i \textit{ и } u_j \textit{ не является петлей}; \\ 0 - \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 4.1.5. Мультиграф G, изображенный на рисунке 4.7, имеет матрицу инцидентности

$$B_G=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

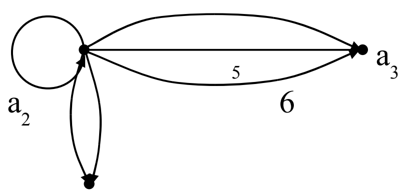


Рисунок 4.7.

Мультиграфы G=<M,U,P> и G'=<M',U',P'> называются изоморфными, если существуют биекции $\varphi:M\leftrightarrow M'$ и $\psi:U\leftrightarrow U'$ такие, что $(a,u,b)\in P$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(a),\psi(u),\varphi(b))\in P'$.

Аналогично теореме 4.1.1. справедлива

Теорема 4.1.2. Мультиграфы G и G' изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности получаются друг из друга некоторыми перестановками строк и столбцов.

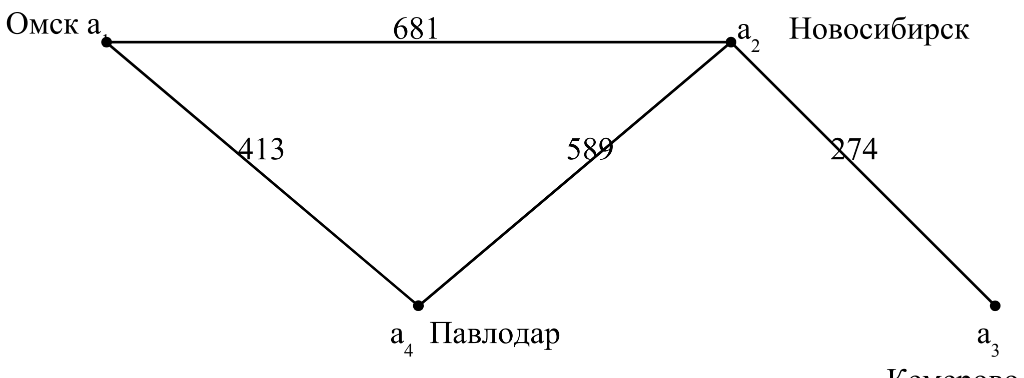


Рисунок 4.8.

Во многих задачах требуется дополнительная информация о вершинах и ребрах, например, о расстоянии между населенными пунктами в случае, когда граф представляет собой сеть дорог; или о времени прохождения сигнала от одного узла связи к другому и т.д. В таких задачах используются взвешенные графы.

Пусть S_M и S_R – множества меток. Пометкой или распределением меток графа G=<M,R> называется пара функций $f:M\to S_M$ (распределение меток вершин), $g:R\to S_R$ (распределение меток дуг). Четверка <M,R,f,g> называется взвешенным или помеченным графом. Для вершины $a\in M$ элемент f(a) называется весом вершины a, а для дуги $u\in R$ элемент g(u) – весом дуги u. Часто бывают помеченными только вершины (в этом случае g=const) или дуги (в этом случае f=const).

Пример 4.1.6. Пусть $M=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $R=\{[a_1,a_2],[a_2,a_3],[a_1,a_4],[a_2,a_4]\}$, $f:M\to C$, где C – множество городов, $g:R\to\omega$, $f(a_1)$=Омск, $f(a_2)$=Новосибирск, $f(a_3)$=Кемерово, $f(a_4)$=Павлодар, $g([a_1,a_2])=681$, $g([a_2,a_3])=274$, $g([a_1,a_4])=413$, $g([a_2,a_4])=589$. Помеченный граф <M,R,f,g> изображен на рисунке 4.8 и представляет собой схему автомобильных дорог с указанием их протяженности.

Информацию о весах дуг во взвешенном графе можно представлять в виде матрицы весов $W=(\omega_{ij})$, где ω_{ij} – вес дуги (a_i,a_j), если дуга (a_i,a_j) существует, а для несуществующих дуг веса обычно помечают нулем или знаком ∞ в зависимости от приложений. В примере 4.1.6 матрица весов имеет вид

$$W=\begin{pmatrix} 0 & 681 & \infty & 413 \\ 681 & 0 & 274 & 589 \\ \infty & 274 & 0 & \infty \\ 413 & 589 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Если граф G=<M,R> является разреженным, то есть число дуг |R| достаточно мало по сравнению с числом вершин |M|, то более эффективным, чем с помощью матрицы смежности, является представление дуг графа посредством списка дуг. Этот список задается двумя наборами $\overline{m}=(m_1,m_2,\dots,m_{|R|})$ и $\overline{n}=(n_1,n_2,\dots,n_{|R|})$, где (a_{mi},a_{ni}) - I-я дуга графа G.

Пример 4.1.7. Орграф, изображенный на рисунке 4.6, представляется следующим списком дуг: $\overline{m}=(1,1,2,3,4,4)$, $\overline{n}=(1,2,3,4,3,4)$. Для представления рассматриваемого графа матрицей смежности требуется $5^2=25$ элементов, а списком дуг - $6\cdot 2=12$ элементов.

Другим представлением графа, удобным при работе с графами, в которых удаляются или добавляются вершины, является структура смежности, получаемая составлением для каждой вершины a списка номеров ее последователей, то есть номеров вершин b, для которых имеется дуга (a,b).

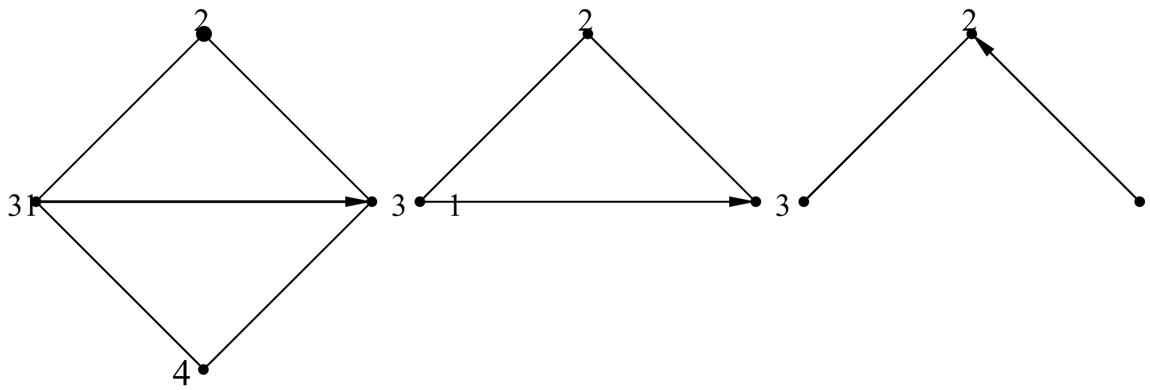
Пример 4.1.8. Орграф, изображенный на рисунке 4.6, представляется следующей структурой смежности:

Вершины	Списки последователей
1:	1, 2
2:	3
3:	4
4:	3, 4
5:	

Подграфы и части графа. Операции над графами.

Граф $G^{/}$=<$M^{/}$,$R^{/}$> называется подграфом графа G=<M,R>, если $M^{/}\subseteq M$ и $R^{/}=R\cap(M^{/})^2$. Граф $G^{/}$ называется частью графа G, если $M^{/}\subseteq M$ и $R^{/}\subseteq R\cap(M^{/})^2$.

Пример 4.2.1. Граф $G^{/}$=<{1,2,3},{[1,2],(1,3),[2,3]}> (рис.4.9б) является подграфом графа G=<{1,2,3,4},{[1,2],(1,3),[1,4],[2,3],[3,4]}> (рис.4.9а), а граф $G^{//}$=<{1,2,3},{[1,2],(3,2)}> (рис.4.9в) – частью графа G.



а б в

Рассмотрим некоторые основные операции, производимые над графами.

Операцией добавления к графу G=<M,R> вершины a образуется граф <M∪{a},R>. Операция добавления дуги (a,b) к графу G состоит в образовании графа <M∪{a,b},R∪{(a,b)}>. Под операцией удаления дуги (a,b) из графа G понимается операция, заключающаяся в удалении пары (a,b) из множества дуг R, в результате получается граф <M,R\{(a,b)}>. Операция удаления вершины a из графа G заключается в удалении вершины a вместе с инцидентными ей дугами: <M\{a},R\{b,c)|b=a или c-a}>.

Операция отождествления вершин a и b графа G=<M,R> состоит в удалении из графа G вершин a и b и присоединении новой вершины $a^{/}$, дуг ($a^{/}$,c), если (a,c)∈R или (b,c)∈R, и дуг (c,$a^{/}$), если (c,a)∈R или (c,b)∈R: <(M\{a,b})∪{$a^{/}$},

$(R\setminus\{(c,d)|c=a$ или $d=a$, или $c=b$ или $d=b\})\cup\{(a',c)|(a,c)\in R$, или $(b,c)\in R\}\cup\{(c,a')|$ $(c,a)\in R$, или $(c,b)\in R\}>$.

Говорят, что построенный граф получается из графа G отождествлением вершин a и b. В случае, когда a и b соединены дугой, операцию отождествления вершин a и b называют стягиванием дуги (a,b).

Пример 4.2.2. Из графа G, показанного на рисунке 4.10, добавлением вершины 5 образуется граф G_1, добавлением дуги (3,1) – граф G_2, удалением дуги (3,2) – граф G_3, удалением вершины 2 – граф G_4, отождествлением вершин 1 и 4 – граф G_5, стягиванием дуги (2,3) – граф G_6.

Дополнением графа без петель $G=<M,R>$ называется граф $\overline{G}=<M,M^2\setminus(R\cup id_M)>$.

Пример 4.2.3. Дополнением графа G, изображенного на рисунке 4.10, является граф $\overline{G}$, показанный на рисунке 4.11.

Пусть $G_1=<M_1,R_1>$, $G_2=<M_2,R_2>$ - графы. Объединением $G_1\cup G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $<M_1\cup M_2,R_1\cup R_2>$. Если $M_1\cap M_2\neq\varnothing$, то пересечением $G_1\cap G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $<M_1\cap M_2,R_1\cap R_2>$. Кольцевой суммой $G_1\oplus G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $<M_1\cup M_2,R_1\oplus R_2>$, где $R_1\oplus R_2=(R_1\setminus R_2)\cup(R_2\setminus R_2)$.

Пример 4.2.4. Для графов $G_1=<\{a_1,a_2,a_3\},\{[a_1,a_2],(a_2,a_3)\}>$ и $G_2=<\{a_1,a_2,a_4\},\{(a_1,a_2),(a_4,a_1)\}>$ (рис.4.12) найдем $G_1\cup G_2$, $G_1\cap G_2$, $G_1\oplus G_2$. По определению имеем $G_1\cup G_2=<\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\{[a_1,a_2],(a_2,a_3),(a_4,a_1)\}>$, $G_1\cap G_2=<\{a_1,a_2\},\{(a_1,a_2)\}>$, $G_1\oplus G_2=<\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\{(a_2,a_1),(a_2,a_3),(a_4,a_1)\}>$.

Соединением G_1+G_2 графов G_1 и G_2 называется граф $<M_1\cup M_2,R_1\cup R_2\cup\{[a,b]|a\in M_1,b\in M_2,a\neq b\}>$.

Пример 4.2.5. Для графов G_1 и G_2, показанных на рисунке 4.13а, соединением G_1+G_2 является граф, представленный на рисунке 4.13б.

Произведением $G_1\times G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $<M_1\times M_2,R>$, в котором $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in R$ тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$ и $(b_1,b_2)\in R_2$ или $b_1=b_2$ и $(a_1,a_2)\in R_1$.

Пример 4.2.6. На рисунке 4.14 изображено произведение $G_1\times G_2$ графов $G_1=<\{1,2\},\{(1,1),(2,1)\}>$ и $G_2=<\{a,b,c\},\{[a,b],(b,c)\}>$.

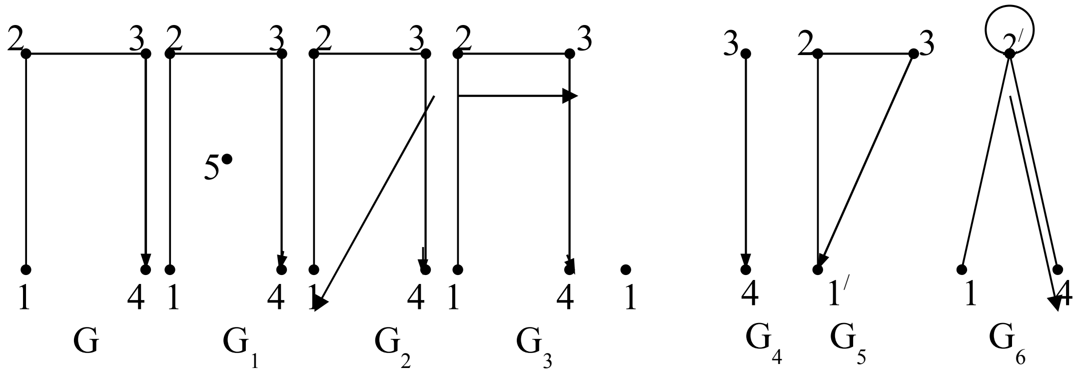


Рисунок 4.10

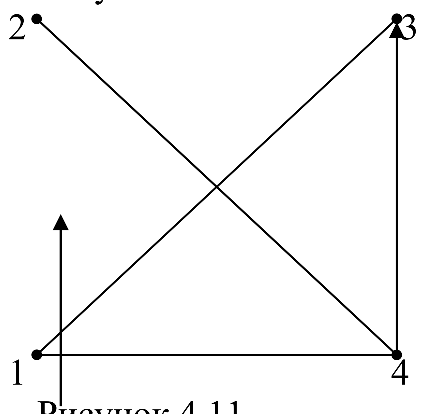


Рисунок 4.11

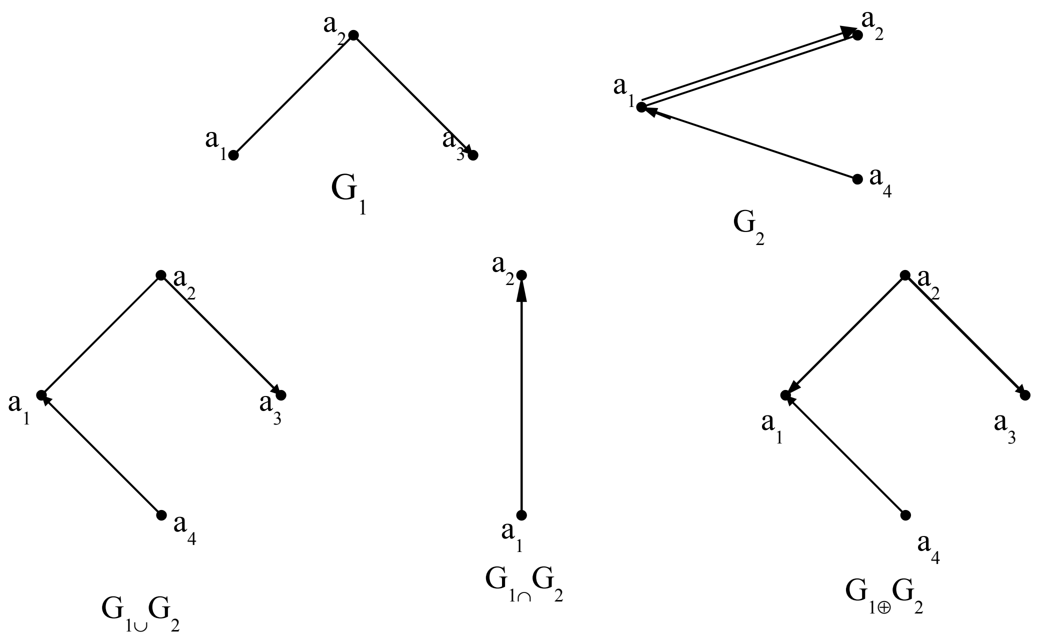


Рисунок 4.12.

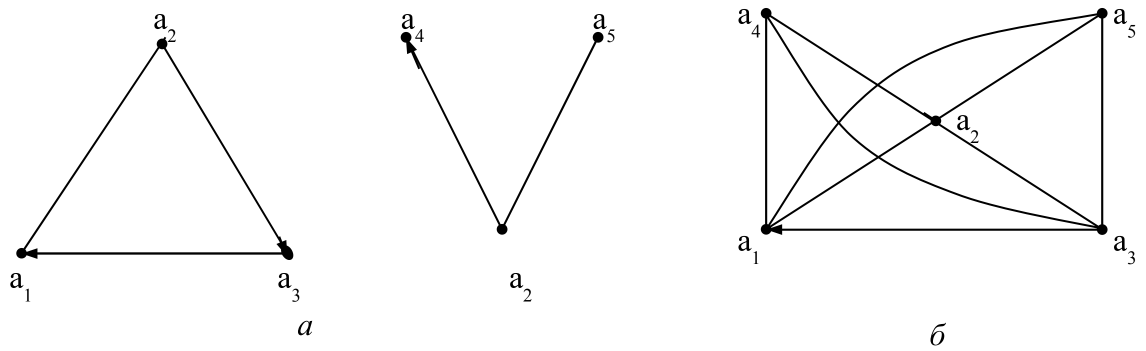


Рисунок 4.13

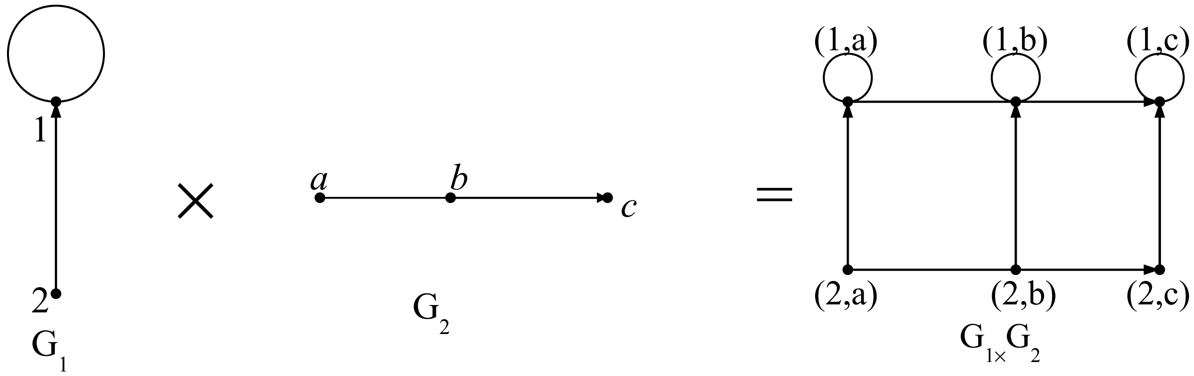


Рисунок 4.14.

Неорграф без петель называется полным, если его любые две различные вершины смежны. Полный граф, имеющий n вершин, обозначается через K_n.

С помощью операции произведения определим по индукции важный класс графов, называемых n-мерными кубами (n-кубами). Рассмотрим граф K_2, вершины которого обозначим 0 и 1. n-мерный куб, или n-куб Q_n, определяется по следующим правилам: Q_0 – граф без петель, состоящий из одной вершины, $Q_1=K_2$, $Q_n=K_2 \times Q_{n-1}$, $n>1$. Вершинами n-мерного куба Q_n являются всевозможные n-ки, состоящие из нулей и единиц (всего таких наборов 2^n), а ребра задаются по следующему правилу: вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие кортежи различаются ровно одной координатой. На рисунке 4.15 показаны двумерный Q_2 и трехмерный Q_3 кубы.

Композицией $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2 называется граф $\langle M_1 \times M_2, R \rangle$, в котором $((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \in R$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $(a_1,a_2) \in R_1$;
2) $a_1=a_2$ и $(b_1,b_2) \in R_2$.

Пример 4.2.7. Композицией $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2, рассмотренных в примере 4.2.6, является граф, изображенный на рисунке 4.16, а композицией $G_2[G_1]$ – граф, представленный на рисунке 4.17.

Неформально композиция $G_1[G_2]$ означает, что каждая вершина a графа G_1 заменяется на изоморфную копию G_a графа G_2, а затем, если $(a_1,a_2) \in R_1$, то между любыми вершинами b_1 из G_{a1} и b_2 из G_{a2} проводится дуга (b_1,b_2).

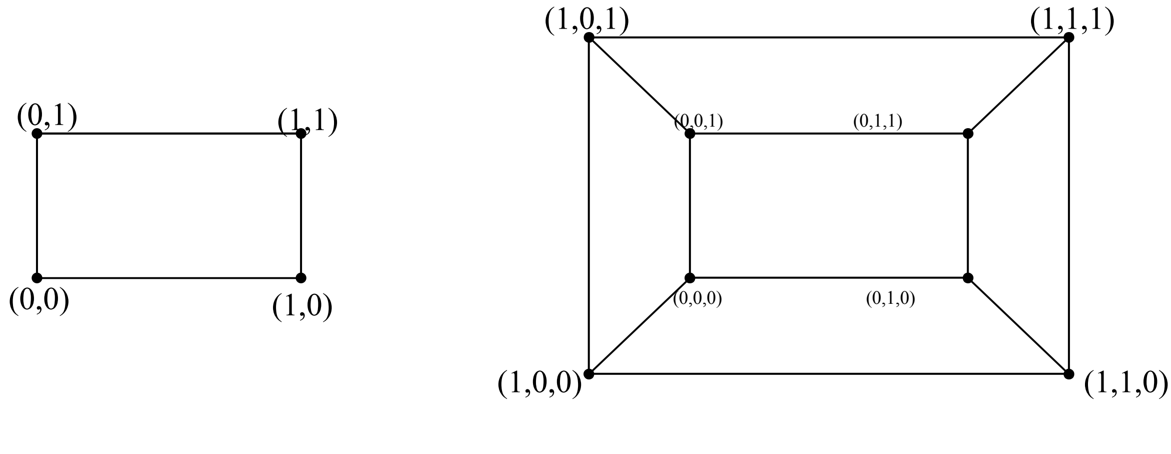


Рисунок 4.15

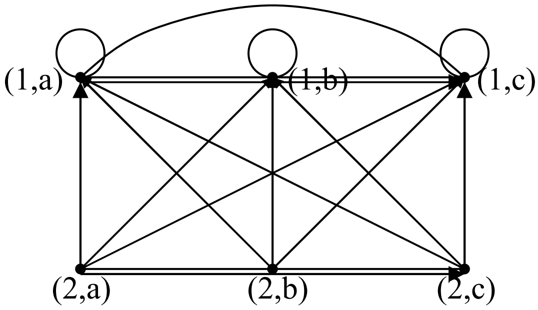


Рисунок 4.16

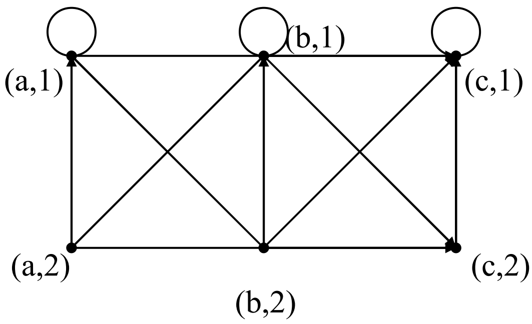


Рисунок 4.17

Маршруты. Достижимость. Связность.

Пусть $G=\langle M,R\rangle$ - граф. Последовательность $a_1,u_1,a_2,u_2,\ldots,u_n,a_{n+1}$ (4.1), где $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\in M$, $u_1,u_2,\ldots,u_n\in R$, называется маршрутом, соединяющим вершины a_1 и a_{n+1} ((a_1,a_{n+1})-маршрутом), если $u_i=(a_i,a_{i+1})$, $I=1,2,\ldots,n$ (рис.4.18).

Очевидно, что маршрут (4.1) можно задать последовательностью $a_1,\ldots,a_{n+1}$ его вершин, а также последовательностью $u_1,\ldots,u_n$ дуг. Число n дуг в маршруте (4.1) называется его длиной.

Пусть G – неорграф. Маршрут (4.1) называется цепью, если все ребра $[a_1,a_2],\ldots,[a_n,a_{n+1}]$ различны, и простой цепью, если все его вершины кроме, возможно, первой и последней, различны. Маршрут (4.1) называется циклическим, если $a_1=a_{n+1}$. Циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь – простым циклом.

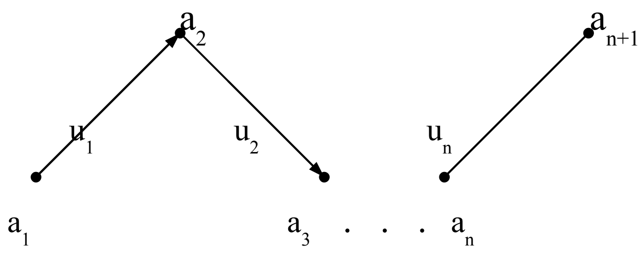


Рисунок 4.18.

Неорграф без циклов называется ациклическим. Минимальная из длин циклов неорграфа называется его обхватом.

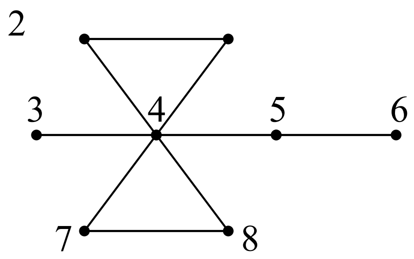


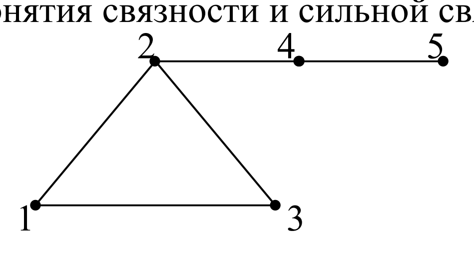
Рисунок 4.19.

Пример 4.3.1. Рассмотрим граф, изображенный на рисунке 4.19. В нем наборы (1,2), (1,2,4,7), (3,4,5,6) являются простыми цепями; (1,2,4,7,8,4) – цепь, не являющаяся простой; (1,2,4,7,8,4,2) – маршрут, не являющийся цепью; (1,2,4,7,8,4,1) – цикл, не являющийся простым; (1,2,4,1) – простой цикл. Обхват этого графа равен 3.

Пусть G – граф, возможно, ориентированный. Маршрут (4.1) называется путем, если все его дуги различны. Путь (4.1) называется контуром, если $a_1=a_{n+1}$. Граф, не имеющий контуров, называется бесконтурным. Вершина b называется достижимой из вершины a, если существует (a,b)-путь.

Пример 4.3.2. Граф, изображенный на рисунке 4.20, имеет контур (1,2,3). Вершина 5 достижима из любой другой вершины, а из вершины 5 не достижима ни одна из вершин.

Неорграф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Граф G называется связным, если соответствующий ему неорграф F(G) тоже является связным. Граф G называется сильно связным, если для каждой пары различных вершин a и b существуют (a,b)-маршрут и (b,a)-маршрут. Аналогично определяются понятия связности и сильной связности для мультиграфов.



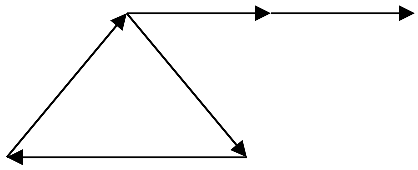


Рисунок 4.20

Пример 4.3.3. Граф, показанный на рисунке 4.19, является связным, орграф, представленный на рисунке 4.20 – связным, но не сильно связным, а граф, изображенный на рисунке 4.21, не является связным.

Заметим, что любой связный неорграф является сильно связным.

Всякий максимальный по включению (сильно) связный подграф данного графа называется его (сильной) связной компонентой или (сильной) компонентой связности.

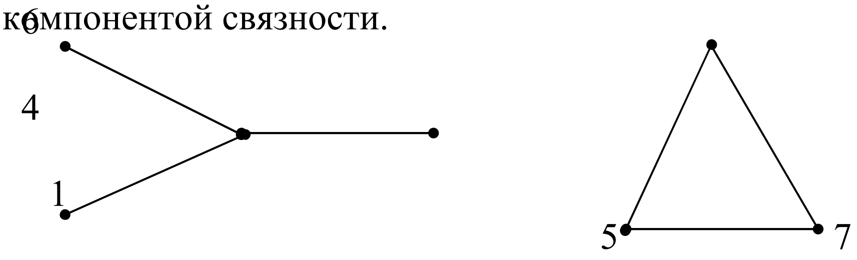


Рисунок 4.21.

Граф, показанный на рисунке 4.21, имеет две компоненты связности с множеством вершин {1,2,3,4} и {5,6,7}. Граф, представленный на рисунке 4.20, имеет три сильные компоненты, задаваемые множествами вершин {1,2,3}, {4} и {5}.

Теорема 4.3.1. Любой граф представляется в виде объединения непересекающихся связных (сильных) компонент. Разложение графа на связные (сильные) компоненты определяется однозначно.

Таким образом, множества вершин связных компонент, а также сильных компонент образуют разбиение множества вершин графа, а число c(G) связных компонент графа G определяется однозначно.

Следующая теорема позволяет по матрице смежности A_G исследовать маршруты данного графа G.

Теорема 4.3.2. Если A_G – матрица смежности графа G, то (I,j)-й элемент матрицы $A_G^k = \underbrace{A_G \cdot \ldots \cdot A_G}_{kppa}$ есть число (a_i,a_j)-маршрутов длины k.

Следствие 4.3.3. 1. В графе G мощности n тогда и только тогда существует (a_i,a_j)-маршрут $(a_i \neq a_j)$, когда (I,j)-й элемент матрицы $A_G+A_G^2+\ldots+A_G^{n-1}$ не равен нулю.

2. В графе G мощности n тогда и только тогда существует цикл, содержащий вершину a_i, когда (i,i)-й элемент матрицы $A_G+A_G^2+\ldots+A_G^n$ не равен нулю.

Пример 4.3.4. Определим с помощью матрицы смежности существование (1,3)-маршрута в графе G, изображенном на рисунке 4.22.

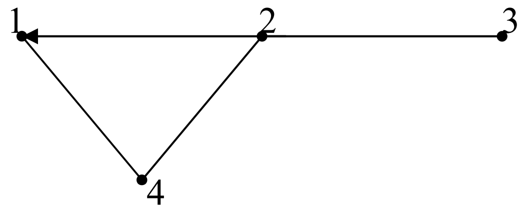


Рис.22

В матрице

$A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1,3)-элемент равен 0, то есть (1,3)-маршрутов длины 1 нет.

В матрице

$A_G^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (1,3)-элемент также равен 0.

В матрице

$A_G^3=A_G^2\cdot A_G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1,3)-элемент равен 1, то есть существует один (1,3)-маршрут длины 3. Из рисунка 4.22 видно, что этот маршрут определяется набором вершин (1,4,2,3). Эту последовательность можно найти на основе перемножения матрицы смежности: элемент (1,3) матрицы A_G^3 получается при перемножении элемента (1,2) матрицы A_G^2 и элемента (2,3) матрицы A_G; в свою очередь элемент (1,2) матрицы A_G^2 образуется при перемножении элемента (1,4) матрицы A_G на элемент (4,2) матрицы A_G; следовательно, двигаясь от 1 к 3 за три шага, получаем маршрут (1,4,2,3).

В матрице A_G^3 элемент (4,2) равен 3, то есть существует 3 (4,2)-маршрута длины 3: (4,1,4,2), (4,2,4,2), (4,2,3,2).

Образуем из матрицы $(b_{ij})=E+A_G+A_G^2+\ldots+A_G^n$ матрицу $C=(c_{ij})$ порядка n по следующему правилу:

$c_{ij}=\begin{cases} 1, если B_{ij} \neq 0, \\ 0, если b_{ij} = 0. \end{cases}$

Матрица C называется матрицей связности, если G – неорграф, и матрицей достижимости, если G – орграф. В графе G тогда и только тогда существует (a_i,a_j)-маршрут $(i\neq j)$, когда $c_{ij}=1$. Таким образом, в матрице C содержится информация о существовании связей между различными элементами графа посредством маршрутов. Если G – связный неорграф, то все элементы матрицы связности C равны единице. В общем случае матрица связности неорграфа является матрицей отношения эквивалентности, соответствующего разбиению множества вершин графа на компоненты связности.

Определим следующим образом матрицу контрдостижимости $Q=(q_{ij})$:

$$q_{ij}=\begin{cases} 1, \textit{если вершина } a_i \textit{ достижима из вершины } a_j; \\ 0 - \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что если C – матрица достижимости, то $Q=C^T$.

Матрицы достижимости и контрдостижимости $C=(c_{ij})$ и $Q=(q_{ij})$ можно использовать для нахождения сильных компонент графа. Рассмотрим матрицу $S=C*Q$, где операция * означает поэлементное произведение матриц C и Q: $s_{ij}=c_{ij}\cdot q_{ij}$. Элемент s_{ij} матрицы S равен 1 тогда и только тогда, когда вершины a_i и a_j взаимно достижимы, то есть a_i достижима из a_j и a_j достижима из a_i. Таким образом, матрица S является матрицей следующего отношения эквивалентности E: выполнимо a_iEa_j тогда и только тогда, когда a_i и a_j находятся в одной сильной компоненте.

Следовательно, сильная компонента, содержащая вершину a_i, состоит из элементов a_j, для которых $s_{ij}=1$.

Пример 4.3.5. Матрицы достижимости C и контрдостижимости Q графа, изображенного на рисунке 4.20, имеют вид

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S=C*Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По 2-й строке матрицы S находим, что сильная компонента, содержащая вершину 2, состоит из вершин {1,2,3}.

Расстояние в графах

Пусть G=<M,R> - связный неорграф, a,b – две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (a,b)-маршрута называется расстоянием между вершинами a и b и обозначается через $\rho(a,b)$. Положим $\rho(a,a)=0$. Очевидно, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет следующим аксиомам метрики:

- $\rho(a,b)\geq 0$;
- $\rho(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$;
- $\rho(b,a)=\rho(a,b)$ (симметричность);
- $\rho(a,b)\leq\rho(a,c)+\rho(c,b)$ (неравенство треугольника).

Если $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, то матрица $P=(p_{ij})$, в которой $p_{ij}=\rho(a_i,a_j)$, называется матрицей расстояний. Заметим, что $P^T=P$, то есть матрица P симметрична.

Для фиксированной величины a величина $e(a)=\max\{\rho(a,b)|b\in M\}$ называется эксцентриситетом вершины a. Таким образом, эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удаленной от нее. Если P – матрица расстояний, то эксцентриситет $e(a_i)$ равен наибольшему из чисел, стоящих в I-й строке.

Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется диаметром графа G и обозначается через d(G): $d(G)=\max\{e(a)|a\in M\}$. Вершина a называется периферийной, если $e(a)=d(G)$.

Пример 4.4.1. Найдем диаметр графа G, изображенного на рисунке 4.23. Матрица расстояний P имеет вид
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, отсюда $e(1)=3$, $e(2)=2$, $e(3)=3$, $e(4)=2$, $e(5)=2$ и, следовательно, $d(G)=3$. Вершины 1 и 3 являются периферийными.

Минимальный из эксцентриситетов графа G называется его радиусом и обозначается через r(G): $r(G)=\min\{e(a)|a\in M\}$. Вершина a называется центральной, если $e(a)=r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его центром.

Пример 4.4.2. 1. Радиус графа, показанного на рисунке 4.23, равен 2, а его центром является множество {2,4,5}.

2. В полном графе K_n все различные вершины смежны, и поэтому $d(K_n)=r(K_n)=1$.

Задача нахождения центральных вершин возникает в практической деятельности людей. Пусть, например, граф представляет собой сеть дорог, то есть вершины соответствуют населенным пунктам, а ребра – дорогам между ними. Требуется оптимально разместить больницы, пункты обслуживания и т.п. В подобных ситуациях оптимизация заключается в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного населенного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины графа. Реальные задачи отличаются от этой идеальной тем, что приходится учитывать и другие обстоятельства – расстояния между населенными пунктами, стоимость, время проезда и т.д. Для учета этих параметров используются взвешенные графы.

Пусть G=<M,R> - взвешенный граф, в котором вес каждой дуги (a,b) есть некоторое вещественное число $\mu(a,b)$. Весом маршрута $a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1}$ называется число $\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu(a_i,a_{i+1})$. Взвешенным расстоянием (ω-расстоянием) $\rho_\omega(a,b)$ между вершинами a и b называется минимальный из весов (a,b)-маршрутов. (a,b)-маршрут, вес которого равен расстоянию $\rho_\omega(a,b)$ называется кратчайшим (a,b)-маршрутом во взвешенном графе G. Взвешенным эксцентриситетом $e_\omega(a)$ вершины a называется число $\max\{\rho_\omega(a,b)|b\in M\}$. Взвешенной центральной вершиной графа G называется вершина a, для которой $e_\omega(a)=\min\{e_\omega(b)|b\in M\}$. Взвешенный эксцентриситет центральной вершины называется взвешенным радиусом графа G и обозначается через $r_\omega(G)$.

Пример. 4.4.3. Во взвешенном графе G, показанном на рисунке 4.8, центральной вершиной является вершина «Новосибирск», а $r_\omega(G)$=681.

Степени вершин

Степенью или валентностью вершины a неорграфа G называется число ребер, инцидентных вершине a, то есть число ребер, концом которых является вершина a (при этом петли считаются дважды). Если G – орграф, то степени его вершин определяются как степени вершин в соответствующем неорграфе F(G). Аналогично вводится понятие степени вершины в мультиграфах. Степень вершины a будем обозначать через $\deg_G a$ или просто deg a. Вершина степени 0 называется изолированной, вершина степени 1 – концевой или висячей.

Пример 4.6.1. Вершины графа G, изображенного на рисунке 4.28, имеют следующие валентности: deg1=deg2=deg3=1 (то есть 1, 2, 3 – висячие вершины), deg4=5, deg5=0 (то есть 5 – изолированная вершина).

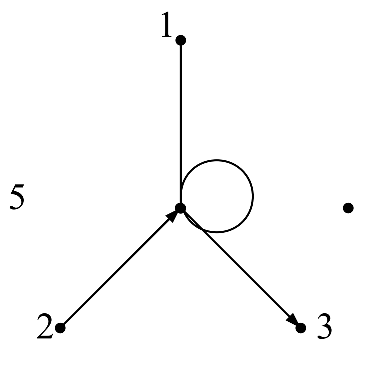


Рисунок 4.28.

Рассмотрим сумму степеней всех вершин графа. Поскольку каждое ребро входит в эту сумму дважды, справедливо

Утверждение 4.6.1. (лемма о рукопожатиях). Сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равна удвоенному числу ребер.

Пусть G – бесконтурный орграф. Полустепенью исхода $deg^{+}a$ вершины a называется число дуг, исходящих из a. Полустепенью захода $deg^{-}a$ вершины a называется число дуг, которые заходят в вершину a. Справедливо соотношение $dega=deg^{+}a+deg^{-}a$.

В примере 4.5.4 имеем $deg2=3$, $deg^{+}2=2$, $deg^{-}2=1$.

Обходы графов

Опишем одну из задач, положивших начало теории графов, - задачу о кенигсберских мостах. На рисунке 4.29 схематично изображена карта города Кенигсберга в XVIII в. Город был расположен на берегах и двух островах реки Преголи. Острова между собой и с берегами были связаны семью мостами. Возник вопрос: можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

Неориентированный мультиграф G, представляющий задачу, показан на рисунке 4.30. Вершины x_1, x_4 соответствуют берегам реки, x_2,x_3 – островам, ребра мультиграфа – мостам. Следовательно, на языке теории графов задача формулируется следующим образом: существует ли в мультиграфе цикл, содержащий все ребра данного мультиграфа?

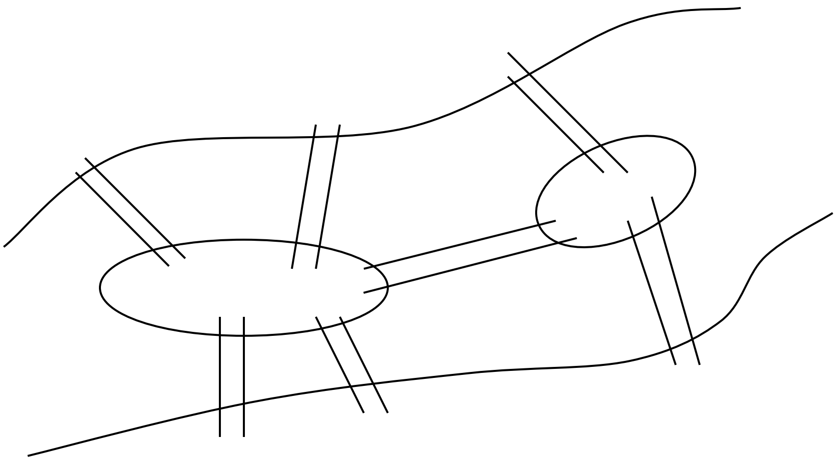


Рисунок 4.29.

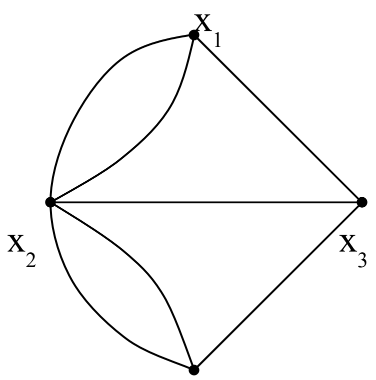


Рисунок 4.30

Выдающимся математиком и механиком Л.Эйлером сформулирован и доказан критерий того, что связный неориентированный мультиграф имеет цикл, содержащий все ребра данного мультиграфа. Цикл, содержащий все ребра мультиграфа, называется эйлеровым, и мультиграф, в котором имеется эйлеров цикл, также называется эйлеровым.

Теорема 4.7.1. Связный неориентированный мультиграф тогда и только тогда является эйлеровым, когда степень каждой из его вершин – четное число.

Мультиграф, изображенный на рисунке 4.30, не содержит эйлеров цикл, поскольку в нем есть вершины, имеющие нечетную степень; более того, все вершины имеют нечетную степень.

Опишем алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе. Этот алгоритм задается следующими правилами.

1. Выбрать произвольно некоторую вершину a.
2. Выбрать произвольно некоторое ребро u, инцидентное a, и присвоить ему номер 1 (назовем это ребро пройденным).
3. Каждое пройденное ребро вычеркнуть и присвоить ему номер, на единицу больше номера предыдущего вычеркнутого ребра.
4. Находясь в вершине x, не выбирать ребро, соединяющее x с a, если имеется возможность иного выбора.
5. Находясь в вершине x, не выбирать ребро, которое является перешейком (то есть ребром, при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру).
6. После того как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

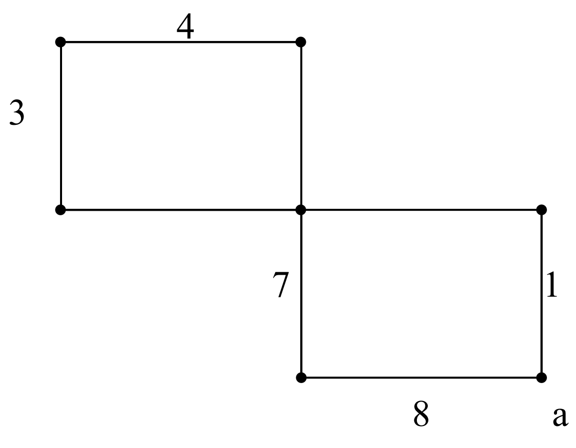


Рисунок 4.31.

Пример 4.7.1. Найдем эйлеров цикл в эйлеровом графе, изображенном на рисунке 4.31. После выбора вершины a и прохождения ребер 1 и 2 имеются три возможности выбора: ребра 3, 6 или 7. Так как ребро 7 является перешейком, выбираем следующее ребро из оставшихся, например 3. Далее обходим оставшиеся ребра и получаем эйлеров цикл 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Будем говорить, что набор реберно непересекающихся цепей покрывает граф G, если каждое ребро графа G входит в одну из этих цепей. Пусть связный граф G содержит k вершин нечетной степени. По лемме о рукопожатиях число k четно. Рассмотрим граф $G^{/}$, полученный добавлением к G новой вершины a и ребер, соединяющих a со всеми вершинами графа G нечетной степени. Поскольку степени всех вершин графа $G^{/}$ четны, $G^{/}$ содержит эйлеров цикл. Если удалить из этого цикла все ребра, инцидентные вершине a, то получится не более k/2 цепей, содержащих все ребра графа G, то есть покрывающих G. С другой стороны, граф, являющийся объединением r реберно непересекающихся цепей, имеет не более 2r вершин нечетной степени. Поэтому граф G нельзя покрыть цепями, число которых меньше k/2. Тем самым доказана

Теорема 4.7.2. Если связный граф содержит k вершин нечетной степени, то минимальное число покрывающих его реберно непересекающихся цепей равно k/2.

В частности, при k=2 граф имеет цепь, которая соединяет вершины нечетной степени и содержит все ребра графа. Цепь, содержащая все ребра графа, называется эйлеровой.

Мы рассмотрели обходы ребер графа. Следующей нашей целью является изучение обходов вершин графа.

Граф называется гамильтоновым, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам такой цикл также называется гамильтоновым. Гамильтоновой называется и простая цепь, содержащая все вершины графа. Очевидно, что любой граф, ребра которого образуют простой цикл, является гамильтоновым, а граф, показанный на рисунке 4.31, - негамильтоновым.

Несмотря на схожесть задач о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов, решение последней значительно сложнее. Известны следующие достаточные условия существования гамильтоновых циклов в связном неорграфе G без петель, имеющем $n \geq 3$ вершин:

Теорема 4.7.3. Если для любых двух различных несмежных вершин a и b графа G выполняется условие $\deg a + \deg b \geq n$, то существует гамильтонов цикл.

Следствие 4.7.4. Если для любой вершины a графа G выполнено условие $\deg a \geq n/2$, то существует гамильтонов цикл.

С задачей нахождения гамильтонова цикла связана задача коммивояжера. Район, который должен посетить бродячий торговец, содержит некоторое количество городов, расстояния между которыми известны. Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты по одному разу и возвращающийся в исходный город. Если таких маршрутов много, требуется найти кратчайший из них.

Математическая постановка задачи выглядит так: требуется найти гамильтонов цикл минимального веса. Отметим некоторые практические задачи, сводящиеся к задаче коммивояжера.

1. Пусть граф задает сеть коммуникаций между фиксированными центрами. Необходимо построить маршрут, обеспечивающий посещение всех центров ровно по одному разу.
2. Имеется станок с числовым программным управлением, который высверливает отверстия в печатных платах по заданной программе. Составляя граф, в котором вершины соответствуют требуемым отверстиям, получаем задачу нахождения обхода вершин, такого, что суммарное время, затраченное на него, было бы минимальным.

Остовы графов

Деревом называется связный неорграф, не содержащий циклов. Любой неорграф без циклов называется ациклическим графом или лесом. Таким образом компонентами связности любого леса являются деревья.

На рисунке 4.32 изображен лес, состоящий из двух деревьев.

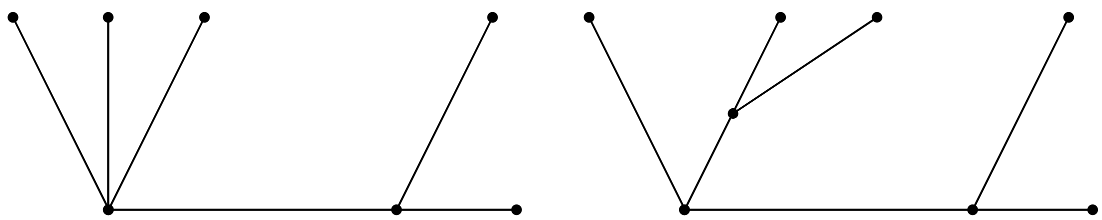


Рисунок 4.32.

Теорема 4.8.1. Для неорграфа G без петель, содержащего n вершин следующие условия эквивалентны:

1) G – дерево;
2) G – связный граф, содержащий n-1 ребро;
3) G – ациклический граф, содержащий n-1 ребро;
4) Любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;
5) G – ациклический граф, такой, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Пусть $G=\langle M,R\rangle$ - неорграф. Часть $G'=\langle M',R'\rangle$ графа G называется остовом или каркасом графа G, если $M=M'$ и G' - лес, который на любой связной компоненте графа G образует дерево. Таким образом, если G – связный граф, то остов G' является деревом, которое будем называть остовным деревом графа G.

Понятие остова для орграфа G определяется как часть G' графа G, для которой $F(G')$ является остовом графа F(G). Аналогично вводится понятие остовного дерева для связного орграфа G.

Очевидно, что в каждом графе существует остов: разрушая в каждой связной компоненте циклы, то есть удаляя лишние ребра, получаем остов.

Пример 4.8.1. В качестве остова графа G, изображенного на рисунке 4.33, можно взять лес с ребрами 2, 3, 4, 6, 7 (вообще говоря, остов определяется неоднозначно).

Из теоремы 4.8.1. вытекает

Следствие 4.8.2. Число ребер произвольного неорграфа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно m-n+c, где m – число ребер, n – число вершин, c – число компонент связности графа G.

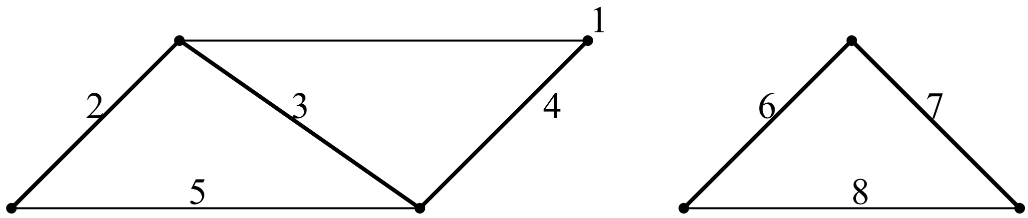


Рис. 4.33

Доказательство. Действительно, если I-я компонента связности C_i графа G содержит n_i вершин, то по теореме 4.8.1. соответствующее дерево K_i остова содержит n_i-1 ребро. Следовательно, для получения K_i из компоненты C_i нужно удалить $m_i-(n_i-1)$ ребер, где m_i – число ребер в C_i. Суммируя удаляемые ребра по всем компонентам связности и замечая, что $\sum_{i=1}^{n} m_i = m, \sum_{i=1}^{c} n_i = n$, получаем, что необходимо удалить $\sum_{i=1}^{c} (m_i - n_i + 1) = m - n + c$ ребер.

Число ν(G)=m-n+c называется цикломатическим числом или циклическим рангом графа G. Число $\nu^*(G)$=n-c называется коциклическим рангом или корангом. Таким образом, $\nu^*(G)$ есть число ребер, входящих в любой остов графа G, и $\nu(G)+\nu^*(G)=m$.

Очевидны следующие два следствия.

Следствие 4.8.3. Неорграф G является лесом тогда и только тогда, когда ν(G)=0.

Следствие 4.8.4. Неорграф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда ν(G)=1.

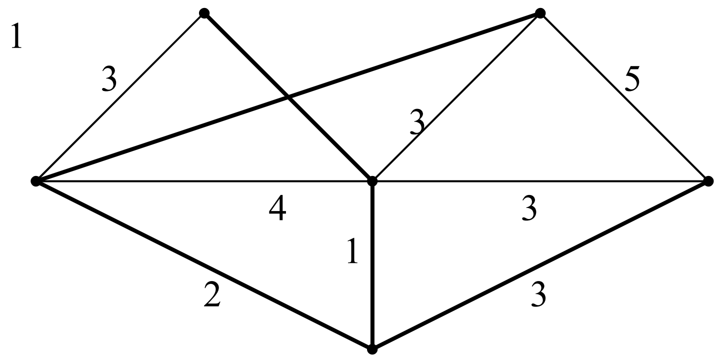
Опишем алгоритм нахождения остова минимального веса во взвешенном графе. Эта задача возникает при проектировании линий электропередач, дорог и т.п., когда требуется заданные центры (вершины) соединить некоторой системой каналов связи (ребер) так, чтобы любые два центра были связаны либо непосредственно соединяющим их каналом (ребром), либо через другие центры и каналы, то есть цепью, и чтобы общая длина (или, например, стоимость) каналов связи была минимальной. Искомая сеть будет остовом минимального веса полного графа.

Алгоритм, решающий задачу нахождения остова минимального веса во взвешенном графе G=<M,R>, заключается в следующем.

1. Строим граф T_1, состоящий из множества вершин M и единственного ребра u_1, которое имеет минимальный вес.
2. Если граф T_i уже построен и $I<n-c$, где $n=|M|$, $c=c(G)$, то строим граф T_{i+1}, добавляя к множеству ребер графа T_i ребро u_{i+1}, имеющее минимальный вес среди ребер, не входящих в T_i и не составляющих циклов с ребрами из T_i.

Приведенный алгоритм, в частности, позволяет находить остов во взвешенном графе, положив $\omega(u_i)=1$ для всех ребер $u_i \in R$.

Пример 4.8.2. На рисунке 4.34 показан остов минимального веса взвешенного графа. Вес остова равен 9.



НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА.

Понятие нечеткого множества.

Под четким множеством или просто множеством, обычно понимают некоторую совокупность определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции и интеллекта, мыслимую как единое целое. В данном высказывании отметим следующий момент: множество A есть совокупность определенных объектов. Это означает, что относительно любого x можно однозначно сказать, принадлежит ли он множеству A или нет.

Условие принадлежности элемента x множеству A можно записать, используя понятие функции принадлежности $\mu(x)$, а именно:

$$\mu(x)=\begin{cases} 1, если x \in A, \\ 0, если x \notin A. \end{cases}$$

Следовательно, множество можно задать в виде совокупности пар: элемента и значения его функции принадлежности: $A=\{(x|\mu(x))\}$ (2.5.1)

Пример 1. Кафедра предлагает пять элективных курсов x_1,x_2,x_3,x_4 и x_5. В соответствии с программой необходимо сдать три курса. Студент выбрал для изучения курсы x_2,x_3 и x_5. Запишем этот факт с помощью функции принадлежности: $A=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}$, где первый элемент каждой пары означает название курса, а второй – описывает факт принадлежности его к подмножеству, выбранному данным студентом («да» или «нет»).

Примеров четких множеств можно привести бесконечно много: список студентов учебной группы, множество домов на данной улице города, множество молекул в капле воды и т.д.

Между тем, огромный объем человеческих знаний и связей с внешним миром включает такие понятия, которые нельзя назвать множествами в смысле (2.5.1). Их следует скорее считать классами с нечеткими границами, когда переход от принадлежности одному классу к принадлежности другому происходит постепенно, не резко. Тем самым предполагается, что логика человеческого рассуждения основывается не на классической двузначной логике, а на логике с нечеткими значениями истинности – нечеткими связками и нечеткими правилами вывода. Вот несколько тому примеров: объем статьи примерно 12 страниц, большая часть территории, подавляющее превосходство в игре, группа из нескольких человек.

Остановимся на последнем примере. Ясно, что группа людей из 3, 5 или 9 человек принадлежит к понятию «группа людей, состоящая из нескольких человек». Однако для них будет неодинаковой степень уверенности в принадлежности к этому понятию, которая зависит от различных, в том числе и субъективных, обстоятельств. Формализовать эти обстоятельства можно, если предположить, что функция принадлежности может принимать любые значения на отрезке [0,1]. Причем крайние значения предписываются в том случае, если элемент безусловно не принадлежит или однозначно принадлежит данному понятию. В частности, множество людей A из нескольких человек может быть описано выражением вида:

$A=\{(1|0),2|0,1),3|0,4),(4|1),(5|1),(6|1),(7|0,8),(8|0,3),(9|0,1),(a|0)$ при $a\geq10\}$.

Приведем определение нечеткого множества, данное основателем теории нечетких множеств Л.А.Заде. Пусть x есть элемент конкретного универсального (так называемого базового) множества E. Тогда нечетким (размытым) множеством A, заданным на базовом множестве E, называют множество упорядоченных пар $A=\{x|\mu_{A(}(x)\}$, $\forall x\in E$, где $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, отображающая множество E в единичный интервал [0,1], то есть $\mu_A(x):E\to[0,1]$.

Очевидно, что если область значений $\mu_A(x)$ ограничить двумя числами 0 и 1, то данное определение будет совпадать с понятием обычного (четкого) множества.

Функция принадлежности нечеткого множества может задаваться не только перечислением всех ее значений для каждого элемента базового множества, но и в виде аналитического выражения. Например, множество вещественных чисел Z очень близких к числу 2, может быть задано так:

$Z=\{x|\mu_Z(x)\}$, $\forall x\in R$, где $\mu_Z(x)=e^{\frac{(x-2)^2}{0,3}}$.

Множество же вещественных чисел Y, тоже достаточно близких к числу 2, есть:

$Y=\{x|\mu_Y(x)\}$, $\forall x\in R$, $\mu_Y(x)=\dfrac{1}{1+(x-2)^2}$.

Графическое изображение этих двух функций принадлежности дано на рисунке 2.12.

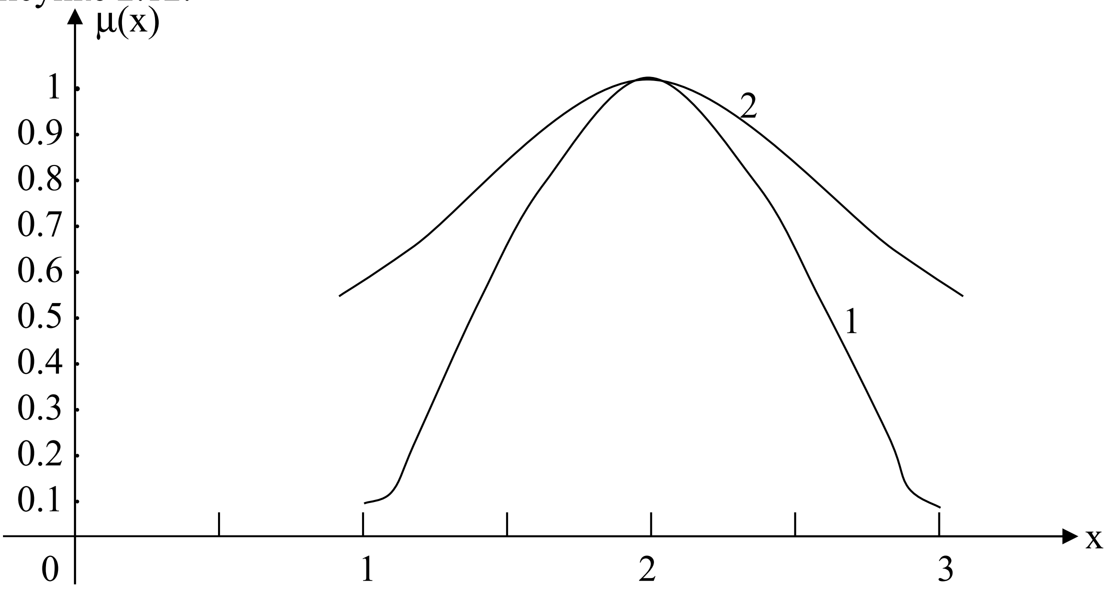


Рисунок 2.11.

1. μ_z – числа очень близкие к 2
2. μ_Y – числа достаточно близкие к 2

Определение. Нечеткое множество A называется нечетким подмножеством B, если и A, и B заданы на одном и том же базовом множестве E и $\forall x\in E:\mu_A(x)\le\mu_B(x)$, что обозначают как $A\subset B$.

Условия равенства двух нечетких множеств A и B, заданных на одном и том же базовом множестве E, имеет следующий вид: A=B или $\forall x\in E:\mu_A(x)=\mu_B(x)$.

Замечание. Между разными по своей сути понятиями «нечеткости» и «вероятности» чувствуется некоторое сходство. Во-первых, эти понятия используются в задачах, где встречается неопределенность либо неточность наших знаний или же принципиальная невозможность точных предсказаний результатов решений. Во-вторых, интервалы изменения и вероятности и функции принадлежности совпадают: $P\in[0,1]$ и $\mu_A(x)\in[0,1]$.

Вместе с тем вероятность является характеристикой объективной, и выводы, полученные на основе применения теории вероятностей, в принципе могут быть проверены на опыте.

Функция же принадлежности определяется субъективно, хотя обычно она отражает реальные соотношения между рассматриваемыми объектами. Об эффективности применения методов, основанных на теории нечетких множеств, обычно судят после получения конкретных результатов.

Если в теории вероятностей предполагается, что вероятность достоверного события равна единице, то есть $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, то соответствующая сумма всех значений функции принадлежности $\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)$ может принимать любые значения от 0 до ∞.

Итак, чтобы задать нечеткое множество A необходимо определить базовое множество элементов E и сформировать функцию принадлежности $\mu_A(x)$, являющуюся субъективной мерой уверенности, с которой каждый элемент x из E принадлежит данному нечеткому множеству A.

Операции над нечеткими множествами.

1. Дополнение. Пусть нечеткие множества A и B имеют единое базовое множество E. Нечеткое множество B является дополнением нечеткого множества A (записывается $B=\rceil A$), если: $\forall x \in E: \mu_B(x)=1-\mu_A(x)$.

Например, если $A=\{(x_1|0,2),(x_2|0,7),(x_3|1),(x_4|0,4),(x_5|0)\}$, то $\rceil A=\{(x_1|0,8),(x_2|0,3),(x_3|0),(x_4|0,6),(x_5|1)\}$.

2. Объединение. Объединением двух нечетких множеств A и B, заданных на одном и том же базовом множестве E, называется нечеткое множество $C=A\cup B$, содержащее и A, и B, причем функция принадлежности определяется по правилу:

$\forall x \in E: \mu_C(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x))$.

Пример 2. Пусть $A=\{(x_1|0,4),(x_2|0,7),(x_3|0,9)\}$ и $B=\{(x_1|0,5),(x_2|0,3),(x_3|1)\}$.

Тогда $C=A\cup B=\{(x_1|0,5),(x_2|0,7),(x_3|1)\}$.

3. Пересечение. Пересечением двух нечетких множеств A и B, заданных на одном и том же базовом множестве E, называется нечеткое множество $D=A\cap B$, содержащее и A, и B, причем функция принадлежности определяется по правилу:

$\forall x E: \mu_D(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x))$.

Для нечетких множеств из примера 2 имеем:

$D=A\cap B=\{(x_1|0,4),(x_2|0,3),(x_3|0,9)\}$.

Наглядное представление операций объединения и пересечения двух нечетких множеств, заданных на непрерывном подмножестве, дают схемы, родственные диаграммам Вьенна-Эйлера, которые представлены на рисунке 2.13. Границы штрихованных областей изображают графики функций принадлежности соответствующих нечетких множеств.

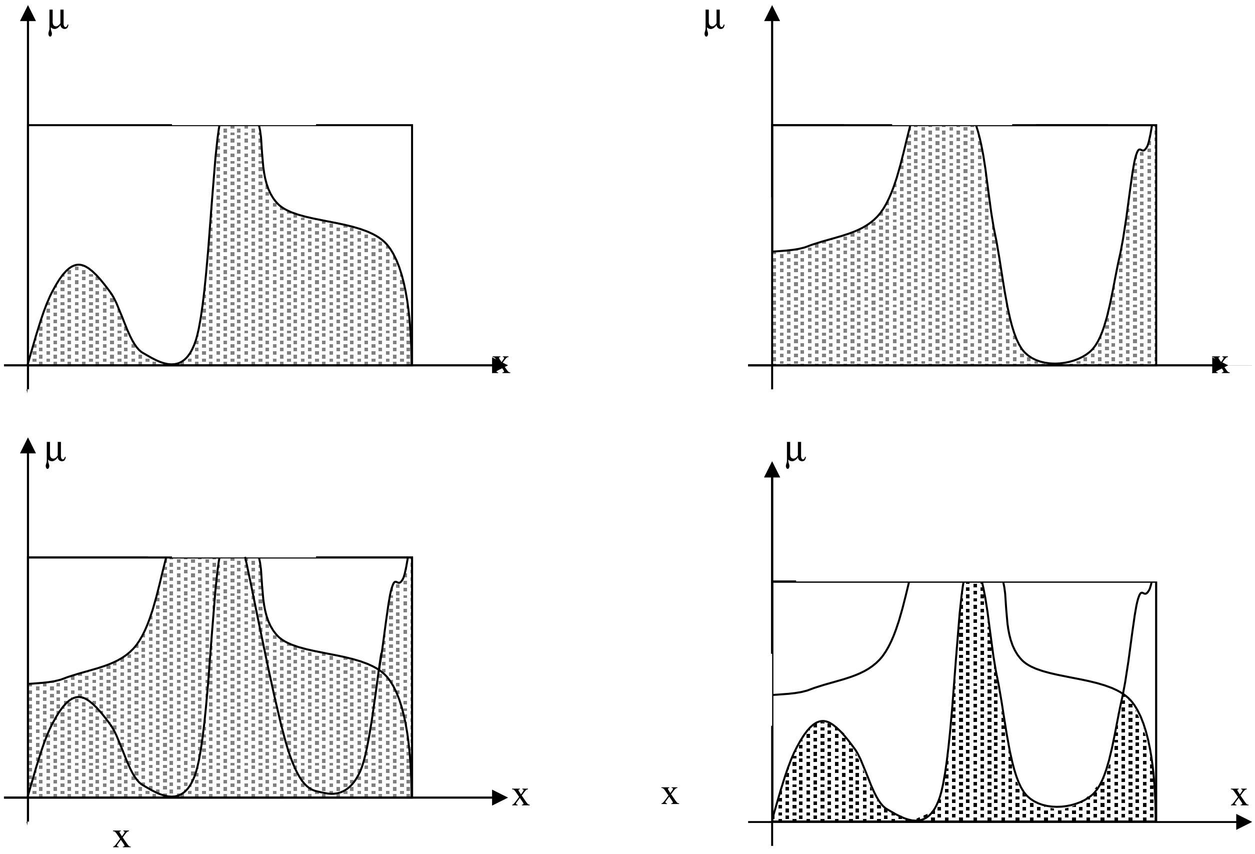


Рисунок 2.12. Иллюстрация операци х
множеств

4. Произведение. Произведением двух нечетких множеств $A \cdot B = A \times B$, заданных на одном и том же базовом множестве E, называется такое нечеткое множество $F = A \cdot B$, функция принадлежности которого определяется по правилу $\forall x \in E: \mu_F(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Для нечетких множеств из примера 2 имеем: $F = A \cdot B = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}21), (x_3|0{,}90)\}$.

5. Сумма. Суммой двух нечетких множеств A и B, заданных на одном и том же базовом множестве E, называется нечеткое множество $H = A + B$, содержащее множества A и B, причем функция принадлежности определяется по правилу $\forall x \in E: \mu_H(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Для нечетких множеств из примера 2 имеем:
$H = A + B = \{(x_1|0{,}7), (x_2|0{,}79), (x_3|1)\}$.

Замечание. Операции умножения и суммирования нечетких множеств употребляются значительно реже, чем операции пересечения и объединения, поскольку для них не выполняются некоторые свойства, в том числе и такое, как дистрибутивность.

6. Разность. Разностью двух множеств A и B, заданных на одном и том же базовом множестве E, называется нечеткое множество G=A-B=A\B, причем функция принадлежности определяется по правилу: $\forall x \in E: \mu_G(x)=\min(\mu_A(x),1-\mu_B(x))$.

Для нечетких множеств из примера 2 имеем:
$G=A-B=\{(x_1|0,4),(x_2|0,7),(x_3|0.0)\}$.

7. Возведение в степень. Пусть задано нечеткое множество A, заданное на базовом множестве E. Возведением в неотрицательную степень «α» нечеткого множества A называется нечеткое множество $K=A^{\alpha}$, функция принадлежности которого $\mu_K(x)$ определяется по правилу: $\mu_K(x)=(\mu_A(x))^{\alpha}$.

Возведение нечеткого множества в квадрат называется операцией концентрирования: $A^2 \equiv CON(A)$.
Извлечение корня квадратного из нечеткого множества, рассматриваемого как возведение в степень 0,5, называется операцией растяжения:
$A^{0,5}=DIL(A)$.
Так, например, если $A=\{(x_1|0,4),(x_2|0,7),(x_3|0,9)\}$, то:
$CON(A)=\{(x_1|0,16),(x_2|0,49),(x_3|0,81)\}$,
$DIL(A)=\{(x_1|0,63),(x_2|0,84),(x_3|0,95)\}$.

Нечетким евклидовым расстоянием между двумя нечеткими множествами A и B называется величина $c=\sqrt{\sum_{\forall x_i} (\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}$ $\forall x_i \in E$.

Ближайшим к данному нечеткому множеству A называется четкое множество A, расположенное на наименьшем евклидовом расстоянии от A. Это множество определяется функцией принадлежности, формируемой по правилу:

$$\forall x_i \in E\ \mu(x_i)=\begin{cases} 0, \text{если } \mu(x_i) \le 0,5 \\ 1, \text{если } \mu(x_i) > 0,5 \end{cases}$$

Пример 3. Пусть заданы два множества:
$A=\{(x_1|0),(x_2|0,1),(x_3|0,3),(x_4|0,7),(x_5|0,8),(x_6|0,9),(x_7|1)\}$ и $B=\{(x_1|0),(x_2|0),(x_3|0),(x_4|0,6),(x_5|0,8),(x_6|1),(x_7|1)\}$.
Тогда $e(AB)=0,346$, а ближайшим к нечеткому множеству A является четкое множество $A=\{(x_0|0),(x_2|0),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|1),(x_6|1),(x_7|1)\}$.

В теории нечетких множеств имеет место принцип обобщения, который можно записать следующим образом: $f(\{x|\mu_A(x)\})=\{f(x)|\mu_A(x)\}$, где A – нечеткое множество, f – некоторое отображение $X \rightarrow Y$.

Например, если $y=x^2+3$ и $A=\{(1|0,4),(2|0,6), 3|0,9\}$, то $f(A)=\{(4|0,4),(7|0,6),(12|0,9)\}$.

Этот принцип открывает возможности вводить функциональные описания на нечетких множествах, что имеет важное значение в приложениях теории нечетких множеств.

Нечеткие отношения

Пусть P – четкое декартово произведение n множеств $E_1,E_2,\ldots,E_n$. Нечеткое подмножество четкого множества называется n-арным нечетким отношением R_n на $P:R_n$.

Величина μ_{Rn}, есть мера того, что совокупность $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принадлежит отношению R_n. Знак $\cup$ в данном случае обозначает объединение соответствующих одноточечных множеств $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

На практике чаще других используется бинарное нечеткое отношение R_2, заданное на двух множествах, например X и Y:

$R_2=\bigcup_{x\times y}(x_i,y_j)\,|\,\mu_R(x_i,y_j)$, где $\mu_R{:}X\times Y\rightarrow[0,1]$.

Бинарное отношение может рассматриваться в качестве двухместного предиката.

Примеры нечетких отношений: «расстояние в пространстве значительно больше 1 м» - тернарное отношение на множестве точек трехмерного пространства; «X – дальний родственник Y» - бинарное отношение на множестве людей.

Нечеткие бинарные отношения удобно задавать в виде матрицы. Например, R_2 – нечеткое отношение «X значительно больше Y», заданное на множествах Ex=(4,8,10) и Ey=(2,3,4) может быть задано следующим образом:

$$R_2=\begin{array}{c}\\ 4\\ 8\\ 10\end{array}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4\\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0\\ 1 & 0{,}8 & 0{,}7\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8\end{pmatrix}$$

Содержательно это означает, например, следующее: со степенью уверенности лишь 0,7 можно утверждать, что 4 значительно больше 2; но 8 значительно больше 3 со степенью уверенности 0,8.

Нечеткому бинарному отношению можно поставить в соответствие нечеткий граф. Нечетким графом G на множествах E_1 и E_2 называется такое нечеткое подмножество, что $\forall(x_i,y_i)\in E_1\times E_2{:}\mu_G(x_i,y_i)\in M$, где M – множество принадлежностей элементов множества $E_1\times E_2$.

Наглядным изображением нечеткого графа могут служить различные размытые изображения. Над нечеткими отношениями можно определить те же операции, что и над четкими отношениями.

Нечеткие и лингвистические переменные.

Формализация нечетких понятий и отношений естественного языка возможна на основе понятий нечеткой и лингвистической переменных.

Нечеткой переменной называется кортеж <X,U,C>, где X – название переменной; U – универсальное множество (область определения переменной X); C – нечеткое множество на U, описывающее нечеткое ограничение на значения переменной X.

Множество C описывает семантику нечеткой переменной, и его часто называют функцией совместимости нечеткой переменной. Переменная u является для X базовой переменной. Множество C определяет ту степень, с которой элементу x соответствует значение u. Значения нечеткой переменной есть числа.

Пример. Нечеткая переменная X, именуемая «человек высокого роста». Положим U=(170-200), а C определим следующим образом:

$$C=\overset{200}{\underset{170}{U}}\left(1-\frac{1}{1+[0,2(u-170)]^3}\right).$$

Лингвистической переменной называется кортеж <X,T(X),U,G,M>, где X – название переменной; T(X) – терм-множество, определяющее названия лингвистических значений X из универсального множества U; G – синтаксические правила, описывающие процесс получения новых значений лингвистической переменной; M – семантическое правило, позволяющее ставить каждой нечеткой переменной X ее смысл M(X).

Лингвистическая переменная – это переменная более высокого порядка, чем нечеткая переменная, поскольку значениями лингвистической переменной являются нечеткие переменные.

Различают числовые и нечисловые лингвистические переменные. Лингвистическая переменная называется числовой, если ее область определения U есть подмножество из R^1, то есть из множества вещественных чисел. Значения числовой лингвистической переменной называют нечеткими числами.

Пример. Числовая лингвистическая переменная «НАДЕЖНОСТЬ» может быть описана следующим образом: <НАДЕЖНОСТЬ, T, [0,1],G,M>, где T={очень низкая, низкая, средняя, высокая, очень высокая}; G – процедура перебора элементов из T; M – ограничения, обусловленные значениями из T и определяющие смысл лингвистических значений. В частности, M могут быть выбраны так:

$$M[\text{очень низкая}]=\overset{0,3}{\underset{0}{U}}\exp(-100u^2)\,|\,u;$$

$$M[\text{низкая}]=\overset{0,5}{\underset{0,2}{U}}\exp[(-(u-0,3)^2/0,02)]\,|\,u;$$

$$M[\textit{средняя}]=\overset{0,8}{\underset{0,3}{U}}\exp[-(u-0,55)^2/0,04]\,|\,u;$$

$$M[\textit{высокая}]=\overset{1}{\underset{0,7}{U}}\exp[-(u-0,8)^2/0,01]\,|\,u;$$

$$M[\textit{оченьвысокая}]=\overset{1}{\underset{0,7}{U}}\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{1+[10(u-0,7)]^{1,5}}}\right)|\,u.$$

Примером нечисловой лингвистической переменной может служить переменная КРАСИВЫЙ, формализующая понятие «красивый город» со значениями «не очень красивый», «красивый», «очень красивый», «очень-очень красивый» и т.п.

В дальнейшем будем рассматривать только числовые лингвистические переменные.

Порождение элементов из T(X) возможно двумя способами: процедурой просмотра элементов терм-множества и путем реализации некоторого алгоритма. Если терм-множество T(X) и функцию M можно задавать алгоритмически, то такую лингвистическую переменную называют структуризованной.

Рассмотрим один из возможных способов алгоритмического задания синтаксического G и семантического M правил, связанных с данной лингвистической переменной. Для этого отождествим слова «или», «и», «не», «очень» с отдельными операциями над нечеткими множествами следующим образом:

«или» - операция объединения;

«и» - операция пересечения;

«не» - операция взятия дополнения;

«очень» - операция концентрирования.

Теперь, имея лишь небольшой набор первичных термов, можно аналитически записывать достаточно сложные лингвистические конструкции. Рассмотрим, например, лингвистическую переменную «ВЕС» на множестве людей. В качестве первичных выберем термы «легкий» T_1, и «тяжелый», T_2. Тогда терм «не очень легкий и не очень тяжелый» можно записать так: $\neg(T_1^2)\cap\neg(T_2^2)$, а «очень-очень-очень тяжелый» - (T_2^3) и т.д.

Пусть смысл лингвистического значения «легкий» определяется выражением

M(легкий)=$\begin{cases} 0 u < 0 \\ \dfrac{1}{1+0{,}01(u-40)^2} u \geq 0 \end{cases}$, а смысл значения «тяжелый» - выражением:

M(тяжелый)=$\begin{cases} 0, u \geq 0 \\ \dfrac{0{,}01(u-70)^2}{1+0{,}01(u-70)^2}, u \geq 0 \end{cases}$.

Тогда значение «не очень тяжелый» определяется выражением:

M(не очень тяжелый)=$1-[\dfrac{0{,}01(u-70)^2}{1+0{,}01(u-70)^2}]^2$.

О построении функции принадлежности

Одним из основных вопросов, который необходимо решить на пути практического применения теории нечетких множеств, является вопрос о формализации нечетких понятий и отношений. При этом существенное место отводится построению собственно функций принадлежности нечетких множеств. Выше отмечалось, что любая функция принадлежности носит субъективный характер, хотя может отражать мнение не одного лица, а весьма большого числа людей.

Одной из простейших и наиболее ясной по реализации является вероятностная схема, суть которой заключается в следующем. Каждому из n экспертов предлагается ответить на вопрос о принадлежности элемента x к множеству A. Если n_1 экспертов отвечает на вопрос утвердительно, а n_2 – отрицательно, то считают, что $\mu(x)=\frac{n_1}{n_1+n_2}$.

Существует целый ряд других, более сложных методик. Однако наиболее перспективной представляется процедура построения функций принадлежности в режиме диалога с компьютером на основе использования стандартного набора графиков.

Стандартный набор графиков функций принадлежности для утверждения «величина x мала» приведена на рисунке 2.13а-е. Из приведенных функций легко, например, составить функции принадлежности утверждений типа «величина |x| большая» (рис.2.14).

Элементы нечетких алгоритмов

Нечетким алгоритмом называют последовательность действий, выполняемых в соответствии с семантикой нечетких операторов и приводящих к нечеткому (размытому) решению задачи. Основными элементами нечетких алгоритмов являются выполнение арифметических операций над нечеткими числами и выполнение условных нечетких операторов типа «если-то-иначе».

Стандартные графики функции принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1, если(0\le x\le a)\\ 0, если(x>a)\end{cases}$$

Рис.2.13а

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=e^{-kx^2}, k>0$$

Рис.2.13б

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - ax^2, если(0 \le x \le \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} \\ 0, если(x > \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} \end{cases}$$

Рис.2.13в

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, если(0 \le x \le a_1) \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, если(a_1 \le x \le a_2) \end{cases}$$

Рис.2.13г

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + kx^2}, k > 1$$

Рис.2.13д

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, если(0 \le x \le a) \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{\pi}{b - a}(x - \dfrac{a + b}{2})), \\ если(a \le x \le b) \\ 0, если(b < x) \end{cases}$$

Рис.2.13е

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{kx^2}}$$

Рис.2.14. Функция принадлежности для понятия «величина |x| большая».

Выполнение арифметических операций над нечеткими числами

В соответствии с принципом обобщения бинарная арифметическая операция $\oplus$ над нечеткими числами A и B есть нечеткое число C, которое определим следующим образом: $A \oplus B = C = \bigcup_{\forall n} \tilde{c} \mid \min[\mu_A, \mu_b]$, где $\forall a \in S_A$, $\forall b \in S_B$, $c=(a \oplus b), c \in S_c$;

S_A, S_B, S_C – носители нечетких множеств (четкие множества);

$\oplus$ - одна из арифметических операций «+», «–», «·» или «/».

Если результат арифметической операции над элементами носителей нечетких множеств совпадает, то есть $a_i \oplus b_j = a_k \oplus b_m$, то в S_c из них включается лишь один и ему предписывается значение функции принадлежности, имеющее из двух значений функций принадлежности большее значение. Например, пусть заданы нечеткие числа A и B:

A={(2|0,3),(6|0,9),(7|0,7)}

B={3|0,3),(4|0,8),(5|0,4)}.

Тогда:

C_{A+B}={(5|0,3),(6|0,3),(7|0,3),(9|0,3),(10|0,8),(11|0,7),(12|0,4)};

C_{A-B}={(-3|0,3),(-2|0,3),(-1|0,3),(1|0,4),(2|0,8),(3|0,7),(4|0,3)};

C_{AB}={(6|0,3),(8|0,3),(10|0,3),(18|0,3),(21|0,3),(24|0,8),(28|0,7),(30|0,4),(35|0,4)};

$C_{A/B}$={(0,4|0,3),(0,5|0,3),(0,67|0,3),(1,2|0,4),(1,4|0,4),(1,5|0,8),(1,75|0,7),(2|0,3),(2,33|0,3)}.

Выполнение условных нечетких операторов

Будем рассматривать условный нечеткий оператор следующего вида: «если W, то K, иначе L», где – W нечеткое логическое выражение, то есть любая формула, в которую входят лингвистические и (или) нечеткие переменные и нечеткие предикаты; K,L – четкие или нечеткие операторы.

Нечетким предикатом называется функция, значениями которой являются нечеткие высказывания: $P^n(x)=X \rightarrow \mu_P(x) \in [0,1], X \subset X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n$, где $P^n(X)$ – нечеткий предикат; $\mu_P(X^i)$ – степень истинности нечеткого высказывания $P^n(X^i)$, $X^i=X_1^i, X_2^i, X_3^i, \ldots, X_n^i$.

$P^n(X^i)$ может рассматриваться как степень уверенности субъекта в том, что он назовет данное высказывание истинным.

Примеры нечетких предикатов:

$P^1(x)$ – «числа x, близкие к нулю»;

$P^2(x,y)$ – «удаленные от районного центра села»;

$P^3(p,v,t)$ – «режим работы двигателя близок к оптимальному: p_0, v_0, t_0».

Результат выполнения нечеткого условного оператора можно задать выражением:

R(если W, то K, иначе L)={R(K): μ_W, R(L)|(1-μ_W)}, где R(|) – результат выполнения оператора |;

μ_W – степень истинности выражения W.

Наиболее целесообразной представляется следующая однозначная схема выполнения операторов. Разыгрывается равномерно распределенная на интервале [0,1] случайная величина ξ. Результат выполнения условного нечеткого оператора определяется из условия:

$$R(\text{если } W, \text{ то } K, \text{ иначе } L)=\begin{cases} R(K), \text{если} \mu_W \geq \xi \\ R(L), \text{если} \mu_W < \xi \end{cases}$$

Теория нечетких множеств открывает широкие перспективы для построения имитационных моделей в гуманитарной области деятельности человека и ждет активного практического применения.