ЛЕКЦИЯ N15.

Кривые второго порядка.

1.Окружность

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат:

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ (1),

где A, $2B$, C, $2D$, $2E$, F – действительные числа и, кроме того, хотя бы одно из чисел A, B или C не равно нулю.

Простейшей кривой является **окружность**. Пусть центр окружности находится в точке $M_0(a,\ b)$ и радиус окружности равен R. Так как окружность есть множество точек, находящихся на заданном расстоянии от центра M_0, то $|\mathbf{M_0M}|=R$ или $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Раскроем скобки: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$ (2).

Для уравнения окружности выполняются два условия:

1) член с xy отсутствует;
2) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой.

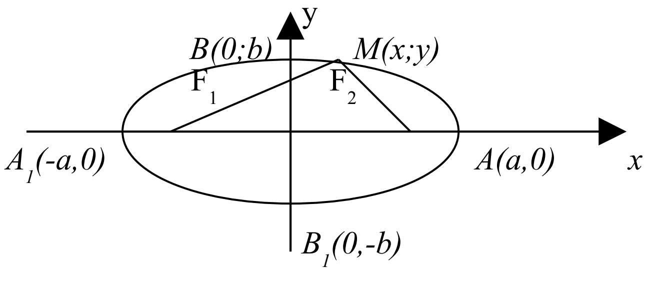
Будет ли уравнение (1) уравнением окружности, если у него не будет члена $2Bxy$ и $A=C$. Заметим, что можно считать, что $A=1$ $(C=1)$, так как, если $A\neq 1$, то на A можно разделить обе части этого уравнения. Итак, рассмотрим уравнение $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$ (3) $\rightarrow$ $(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F$ (4)

Рассмотрим три случая:

1) $D^2+E^2-F>0$. В этом случае уравнение (4), значит и (3) определяет окружность с центром в точке $O\ (-D,\ -E)$ и радиусом $R^2=D^2+E^2-F$
2) $D^2+E^2-F=0$. $(x+D)^2+(y+E)^2=0$. Этому уравнению удовлетворяют координаты единственной точки
3) $D^2+E^2-F<0$ – нонсенс.

2.Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек постоянна. Эти точки называются фокусами и обозначаются F_1 и F_2, расстояние между ними $2c$, а сумма расстояний от каждой точки до фокусов – $2a$ (по условию $2a>2c$).



Построим декартову систему координат, так, чтобы F_1 и F_2 были на оси абсцисс, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2.

Выведем уравнение эллипса. Для этого рассмотрим произвольную точку $M(x,\ y)$ эллипса.

По определению: $|\boldsymbol{F_1M}|+|\boldsymbol{F_2M}|=2a$.
$\boldsymbol{F_1M}=\{x+c;\ y\}$; $\boldsymbol{F_2M}=\{x-c;\ y\}$.
$|\boldsymbol{F_1M}|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $|\boldsymbol{F_2M}|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad (5)$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2(x-c)^2+a^2y^2$$

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

так как $2a>2c$ (сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны), то $a^2-c^2>0$.
Пусть $a^2-c^2=b^2$

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ - уравнение эллипса. (6)

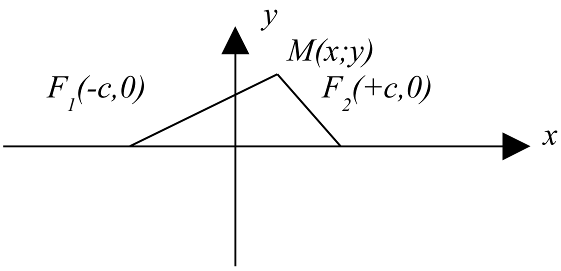
По определению эллипса координаты любой его точки удовлетворяют уравнению (5), а значит, и уравнению (6) (так как (6) – следствие (5)).
(6) – каноническое уравнение эллипса.
Установим форму эллипса. Уравнение содержит только четные степени x и y. Это означает, что если т. $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то ему принадлежит и точка $M^{/}(x, -y)$ (симметричная относительно оси абсцисс) и точка $M^{//}(-x, y)$ (симметричная относительно оси ординат). То есть эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, они совпадают с координатными осями, и их называют осями эллипса. Точка пересечения осей – центр эллипса. Ось, на которой расположены фокусы – фокальная ось.
Определим форму эллипса в I четверти. Разрешим уравнение (6) относительно y;

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Здесь $0\le x\le a$ (под корнем величина больше нуля).
При возрастании x от 0 до a величина у уменьшается от b до 0. Поэтому, часть эллипса в I четверти – это дуга, ограниченная точками $B(0;\ b)$ и $A(a;\ 0)$. Фокальные радиусы: $r_1=a+\varepsilon x$; $r_2=a-\varepsilon x$.
Точки пересечения эллипса с осями координат – вершины эллипса. $AA_1=2a$ - большая ось, $BB_1=2b$ – малая ось эллипса.
a – большая полуось, b – малая полуось. Отношение c/a – половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса, называется эксцентриситетом эллипса $\varepsilon=c/a$. $c<a$; $\varepsilon<1$.
Эксцентриситет характеризует форму эллипса. $(b/a)^2=1-(c/a)^2=1-\varepsilon^2$ (это следует из $a^2-b^2=c^2$)
Чем меньше ε, тем меньше его малая полуось b отличается от малой полуоси a, то есть тем меньше вытянут эллипс (вдоль фокальной оси). В предельном случае $b=a$, $\varepsilon=0/a=0$ – получится окружность радиуса a: $x^2/a^2+y^2/a^2=1 \to x^2+y^2=a^2$.
Фокусы сливаются в одной точке – центре окружности.

3.Гипербола.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина (при условии, что эта величина не равна нулю и меньше расстояния между фокусами). Пусть расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно $2c$, а модуль разности расстояний от любой точки до фокусов равно $2a$ (по условию $0<2a<2c$). Проведем ось абсцисс через фокусы, а за начало координат возьмем середину отрезка F_1F_2.



$MF_1-MF_2=\pm 2a$

Но $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$;

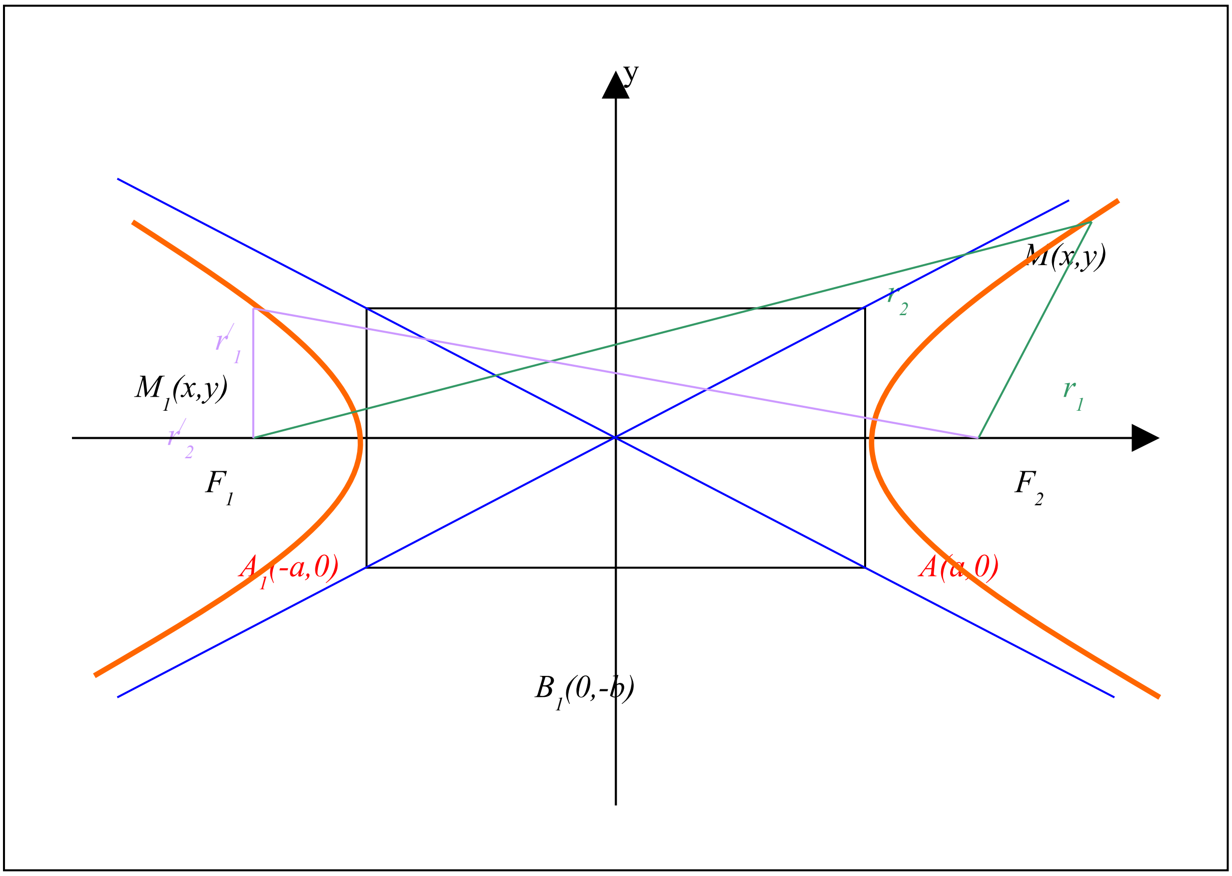
$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$

После аналогичных преобразований (см. эллипс)

получим $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

Это уравнение совпадает с уравнением для эллипса, но здесь $(a^2-c^2)<0$, так как $2a<2c$.
Положим $c^2-a^2=b^2$. Тогда,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое уравнение гиперболы. Установим форму гиперболы.



Она имеет две оси симметрии – оси гиперболы, точка их пересечения – центр гиперболы. Ось гиперболы, на которой расположены фокусы – фокальная ось. Исследуем ее форму в I четверти: $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Здесь $x\geq a$, и при возрастании x от a до $+\infty$ величина y возрастает от 0 до $+\infty$.

Точки пересечения осей гиперболы с фокальной осью – ее вершины. Полагая $y=0$, найдем абсциссы вершин $x=\pm a$. Это точки $A(a;\ 0)$ и $A_1(-a;\ 0)$; с осью ординат гипербола не пересекается. Положим $x=0$, получим $y=\pm\sqrt{-b^2}$.

Поэтому, фокальная ось называется действительной, а вторая ось – мнимой. Длина действительной оси – $2a$, мнимой – $2b$.

Можно показать, что точки части графика гиперболы в I четверти сколь угодно близки к прямой $y=\frac{b}{a}x$, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $k=\frac{b}{a}$. Прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.

Отношение половины расстояния между фокусами к действительной полуоси гиперболы называется эксцентриситетом гиперболы $\varepsilon=c/a$, так как $c>a$, то $\varepsilon>1$.

Из формулы, $c^2-a^2=b^2$ следует, что $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=\varepsilon^2-1$.

Отсюда ясно, что чем меньше ε, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$, тем более вытянут основной прямоугольник гиперболы.

Гипербола называется равнобочной, если $a=b$, ее каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ или $x^2-y^2=a^2$.

Асимптоты равнобочной гиперболы $y=x$; $y=-x$.

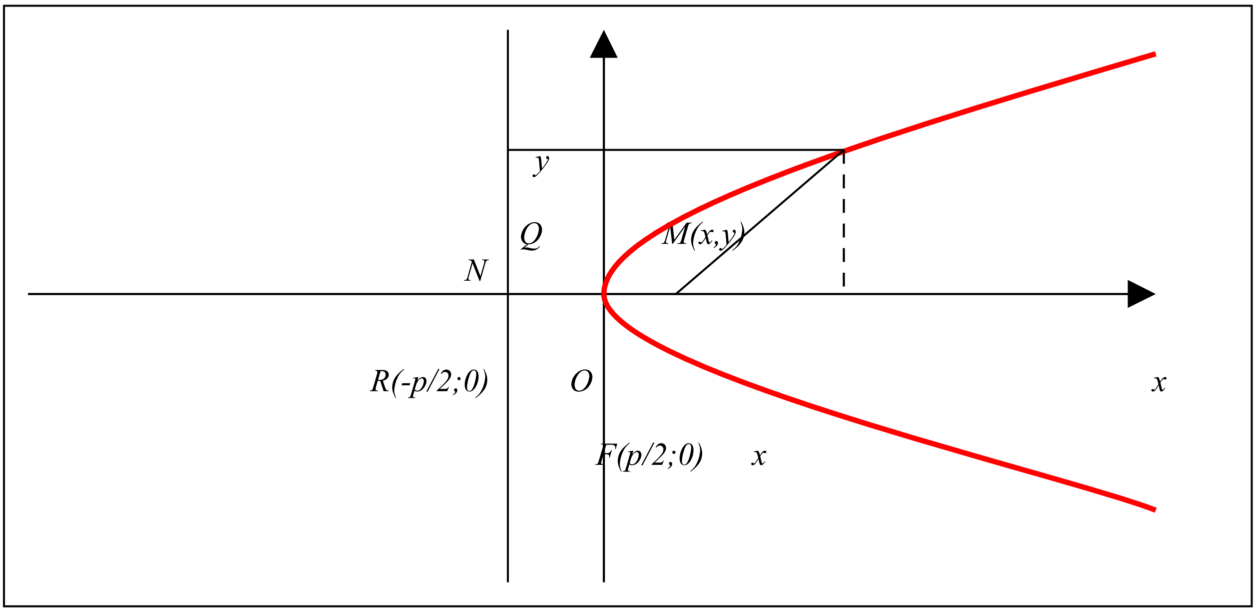
$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}.$$

4.Парабола.

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой (фокус по условию не лежит на директрисе). Пусть расстояние от фокуса до директрисы есть p – это параметр параболы.

Расположим ось абсцисс так, чтобы она проходила через фокус перпендикулярно директрисе и имела положительное направление от директрисы к фокусу. За начало координат выберем середину перпендикуляра FR, опущенного из фокуса на директрису.

Фокус имеет координаты $F(\frac{p}{2};0)$. Уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$.



Пусть т. $M(x;\ y)$ – точка параболы. $MN=MF$. Из рисунка ясно, что $MN=NQ+QM=\frac{p}{2}+x$, а $MF=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-0)^2}$. Следовательно, $\frac{p}{2}+x=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$ $\rightarrow$

$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$ или

$y^2=2px$ – это каноническое уравнение параболы.

Так как y входит в уравнение в четной степени, у кривой одна ось симметрии – ось абсцисс. Вся кривая расположена справа от оси ординат, так как левая часть уравнения≥ 0 и поэтому x, стоящий справа, не может быть меньше нуля. При $x=0,\ y=0$ парабола проходит через начало координат. Ось симметрии – фокальная ось, точка $(0;\ 0)$ – вершина.