

## ЛЕКЦИЯ N8.

### Обратная и ортогональная матрицы.

#### Ранг матрицы. Собственные векторы и собственные значения.

|                                                         |   |
|---------------------------------------------------------|---|
| 1. Обратная матрица.....                                | 1 |
| 2. Ранг матрицы. Эквивалентные матрицы.....             | 2 |
| 3. Элементарные преобразования матрицы.....             | 3 |
| 4. Собственные числа и собственные векторы матрицы..... | 3 |

### 1. Обратная матрица.

**Определение:** Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля, то матрица называется невырожденной. Если же определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *вырожденной*.

Для квадратных матриц введем понятие обратной матрицы. Если  $A$  – квадратная матрица, то *обратной* для нее матрицей называется матрица, обозначаемая  $A^{-1}$  и удовлетворяющая условию  $AA^{-1}=E$  (1)

Можно доказать, что  $A^{-1}A=E$  тоже (2)

Теорема: для того, чтобы квадратная матрица  $A$  имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  была невырожденной, то есть чтобы  $\det(A) \neq 0$ .

Доказательство. Необходимость:

предположим, что для матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Докажем, что в этом случае матрица  $A$  должна быть невырожденной, то есть ее определитель  $|A| \neq 0$ .

Допустим, что  $|A|=0$ , тогда  $|AA^{-1}|=|A| \cdot |A^{-1}|=0$

Но в силу (1) имеем :

$|AA^{-1}|=|E|=1$ , что противоречит предыдущему равенству; Значит,  $|A| \neq 0$ .

Достаточность:

приведем доказательство для матрицы 3-го порядка. Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  -

невырожденная матрица, то есть  $\det(A) \neq 0$ .

Покажем, что в этом случае существует обратная матрица.

Пусть  $A_{ik}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ik}$ .

Матрица  $A^{-1}$ , обратная  $A$  получается следующим образом:

- 1) Составим матрицу  $B$ , заменяя в матрице  $A$  каждый элемент  $a_{ik}$  его алгебраическим дополнением  $A_{ik}$ , деленным на определитель  $|A|$  матрицы  $A$ :

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{13}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{23}/|A| \\ A_{31}/|A| & A_{32}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}$$

- 2) Составим матрицу  $B^*$ , как транспонированную к  $B$

$$B^* = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}$$

Докажем, что  $B^*$  является обратной  $A$ .

Для этого составим произведение:

$$AB^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & \frac{0}{|A|} & \frac{0}{|A|} \\ \frac{0}{|A|} & \frac{|A|}{|A|} & \frac{0}{|A|} \\ \frac{0}{|A|} & \frac{0}{|A|} & \frac{|A|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Итак,  $AB^*=E$ , поэтому  $B^*=A^{-1}$ .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} \text{ и, следовательно, обратная матрица существует.}$$

Пример:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $|A|=-9$ ;  $A_{11}=3$ ;  $A_{12}=-6$ ;  $A_{13}=3$ ;  $A_{21}=-4$ ;  $A_{22}=2$ ;  $A_{23}=-1$ ;  $A_{31}=2$ ;  $A_{32}=-1$ ;  $A_{33}=-$

4.

$$B = \begin{pmatrix} -3/9 & 6/9 & -3/9 \\ 4/9 & -2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=B^* = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что определители матриц  $A$  и  $A^{-1}$  обратны по величине.

$$|A^{-1}|=1/|A|.$$

Знаем, что  $AA^{-1}=E \rightarrow |AA^{-1}|=|A| \cdot |A^{-1}|=|E|=1 \rightarrow |A^{-1}|=1/|A|$ .

**Определение:** ортогональной называется матрица  $A^*$ , если  $A^*A=AA^*=E$ , то есть, если  $A^*=A^{-1}$ .

## 2. Ранг матрицы. Эквивалентные матрицы.

Рассмотрим прямоугольную матрицу размера  $m \times n$ , то есть имеющую  $m$  строк и  $n$  столбцов.

Выделим в ней произвольные  $k$  строк и  $k$  столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка  $k$ .

*Минором*  $k$ -го порядка матрицы  $A$  называется определитель квадратной матрицы, получаемой из данной выделением произвольных  $k$  строк и  $k$  столбцов.

**Рангом** матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля ее миноров.

Если ранг матрицы  $A$  равен  $r$ , то это означает, что в матрице  $A$  есть хотя бы один отличный от нуля минор порядка  $r$ , но всякий минор порядка, больше чем  $r$ , равен нулю. Ранг матрицы  $A$  обозначают  $r(A)$  или  $\text{rang}(A)$ .

Пример:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Минор 4-го порядка в этой матрице один:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Выберем произвольный минор третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Значит,  $r(A)=3$ .

### 3.Элементарные преобразования матрицы.

К элементарным относятся следующие преобразования:

- 1) умножение всех элементов строки (столбца) на число  $\lambda \neq 0$ ,
- 2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на одно и то же число (то же верно для столбца),
- 3) перемена местами строк (столбцов),
- 4) отбрасывание нулевых строк (столбцов).

Если ранг матрицы  $A$  равен рангу матрицы  $B$ , то есть  $r(A)=r(B)$ , то матрицы называют *эквивалентными* и записывают  $A \sim B$ . После элементарных преобразований ранг матрицы не меняется, то есть матрицы, получаемые после элементарных преобразований, эквивалентны.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором* матрицы.

Две прямоугольные матрицы  $A$  и  $B$  эквивалентны, если существуют две квадратные невырожденные матрицы  $S$  и  $T$  такие, что  $A$  и  $B$  связаны преобразованием  $B=SAT$ . Две квадратные матрицы  $A$  и  $\tilde{A}$  подобны (иногда их называют просто эквивалентными), если существует такая невырожденная матрица  $T$  (преобразующая матрица), что  $A$  и  $\tilde{A}$  связаны преобразованием подобия  $\tilde{A} = T^{-1}AT$  или  $A = T\tilde{A}T^{-1}$ .

При каждом преобразовании подобия сохраняется результат сложения матриц, умножения матриц и умножения матрицы на скаляр. Две подобные матрицы имеют один и тот же ранг, один и тот же след и один и тот же определитель.

### 4.Собственные числа и собственные векторы матрицы.

Собственными значениями (собственными числами, характеристическими числами) квадратной матрицы  $A$  называются значения скалярного параметра  $\lambda$ , для которых матрица  $A - \lambda E$  является вырожденной. Спектр (спектр собственных значений) матрицы  $A$  есть множество всех ее собственных значений. Спектр собственных значений квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  совпадает с множеством корней алгебраического уравнения  $n$ -ой

$$\text{степени } \det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{характеристическое уравнение или}$$

вековое уравнение матрицы  $A$ ).

Кратность каждого корня  $\lambda_j$  этого уравнения равна его алгебраической кратности  $m_j'$  как собственного значения, так что  $m_1' + m_2' + \dots = n$ .

Подобные матрицы размера  $n \times n$  имеют одни и те же характеристические уравнения.

**Определение:** ненулевой вектор  $x$ , удовлетворяющий условию  $Ax = \lambda x$  называется собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda$ . Если в линейном пространстве выбран базис, то равенство  $Ax = \lambda x$  можно записать так

$(A - \lambda E) \cdot \xi = 0$  или расписать в виде

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1 - \lambda) \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_n \xi^n &= 0, \\ \alpha_1 \xi^1 + (\alpha_2 - \lambda) \xi^2 + \dots + \alpha_n \xi^n &= 0, \\ \dots & \\ \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 + \dots + (\alpha_n - \lambda) \xi^n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Любая матрица порядка  $n$  имеет  $n$  собственных значений, при этом каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена. Для нулевой и единичной матриц любой ненулевой вектор является собственным. Для диагональной матрицы любой единичный вектор является собственным. Все подобные матрицы имеют одни и те же собственные значения.

*Пример.*

Дана матрица:  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти ее характеристические числа и собственные векторы.

Решение: составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

характеристические числа  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 7$ . Собственный вектор, соответствующий первому характеристическому числу, находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} (5 - \lambda_1) \xi_1' + 2 \xi_2' = 0 \\ 4 \xi_1' + (3 - \lambda_1) \xi_2' = 0 \end{cases}$$

так как  $\lambda_1 = 1$ , то  $\xi_1'$  и  $\xi_2'$  связаны зависимостью  $2\xi_1' + \xi_2' = 0$ . Полагая  $\xi_1' = \alpha$  ( $\alpha \neq 0$  – произвольное число), получаем  $\xi_2' = -2\alpha$  и собственный вектор, соответствующий характеристическому числу  $\lambda_1 = 1$ , есть  $r_1 = \alpha i - 2\alpha j$ . Найдем второй собственный вектор.

Имеем

$$\begin{cases} (5 - \lambda_2) \xi_1'' + 2 \xi_2'' = 0 \\ 4 \xi_1'' + (3 - \lambda_2) \xi_2'' = 0 \end{cases}$$

Подставив значение  $\lambda_2 = 7$ , приходим к соотношению  $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$ , т. е.  $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta \neq 0$ . Собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, служит  $r_2 = \beta i + \beta j$