ЛЕКЦИЯ N7.

Линейная алгебра.Матрицы. Действия над ними.

1. Матрицы.

Итак, на предыдущей лекции мы рассматривали матрицы, состоящие из одинакового числа строк и столбцов, то есть квадратные. Число строк и столбцов квадратной матрицы называется ее порядком.
Квадратная матрица n-го порядка имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ матрицы, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.
Симметрической матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу, то есть $a_{ke}=a_{ek}$

Пример: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не находящиеся на главной диагонали, равны нулю - $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Треугольной (наддиагональной) называется квадратная матрица, если из $i>k$ следует $a_{ik}=0$.
Мономиальной называется квадратная матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой стоит лишь один элемент, отличный от нуля.
Единичной называется диагональная матрица, у которой каждый элемент, находящийся на главной диагонали, равен единице- $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Нулевой матрицей называется матрица, у которой все элементы равны нулю и обозначают 0 или 0_{mn}.
Следом квадратной матрицы A называется сумма ее диагональных элементов.
Матрицы могут быть и прямоугольными, имеющими k строк и l столбцов, например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & \end{pmatrix}$$

Матрица, имеющая только одну строку, называется *матрицей-строкой*, например, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$, а матрица, имеющая только один столбец, называют *матрицей-столбцом,* например:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{pmatrix}$$

Матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одно и то же число строк и одно и то же число столбцов (то есть, если они одного размера) и если при этом каждый элемент a_{kl} матрицы A равен соответствующему элементу b_{kl} матрицы B.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ & & & \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$A=B$

Суммой матриц A и B, имеющих одинаковое число строк и столбцов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \ldots b_{mn} \\ & & & \end{pmatrix}$$

называется третья матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц, то есть $c_{kl}=a_{kl}+b_{kl}$ $(k=1,2,\ldots,m;\ l=1,2,\ldots,n)$.
Сумма матриц обозначается так $C=A+B$.
Аналогично определяется разность матриц:
$C=A-B$, где $c_{kl}=a_{kl}-b_{kl}$

Пример: $A=\begin{pmatrix} 1 & 230 \\ 4 & 561 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 1 & 93 & 0 \\ 4 & 68 & 4 \end{pmatrix}$; где $C=A+B$

Произведение числа λ на матрицу A называется матрица, определяемая равенством:

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ & & \end{pmatrix}$$ и получаемая из A умножением всех ее элементов на λ. Обозначается $B=\lambda A$.

2.Умножение матриц.

Пусть заданы две матрицы A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй. Если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$, то матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$, где $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ называется произведением матрицы A на B и обозначается $C=AB$.

Правило умножения матриц можно сформулировать так: чтобы получить элемент, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце произведения двух матриц, нужно элементы i-ой строки первой матрицы умножить на соответственные элементы j-го столбца второй и полученные произведения сложить. В результате умножения получается матрица, имеющая столько строк, сколько у матрицы множимого и столько столбцов, сколько у матрицы множителя.

Пример: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 8 \\ & & \end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6 & 1\cdot 3+2\cdot 4 & 1\cdot 7+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 6 & 3\cdot 3+4\cdot 4 & 3\cdot 7+4\cdot 8 \\ & & \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 59 \\ 8 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Произведение матриц зависит от порядка сомножителей. Причем, если рассматривать матрицы не квадратные, то может случиться даже, что произведение двух матриц в одном порядке будет иметь смысл, а в обратном – нет.

Но, даже для квадратных матриц произведение матриц некоммутативно, то есть не подчиняется переместительному закону.

Пример: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 17 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 11 & 7 & 16 \end{pmatrix}$, очевидно, что $AB \neq BA$.

Если же $AB=BA$, то матрицы A и B называются *коммутирующими* друг с другом.

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

Единичная матрица коммутативна с любой матрицей: $EA=AE=A$

3.Основные свойства действия над матрицами.

Законы сложения:

1) $A+B=B+A$ – переместительный закон
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ – сочетательный закон
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

Законы умножения:

5) $A(BC)=(AB)C$ – сочетательный
6) $A(B+C)=AB+AC$ – распределительный
7) $A+0=A$
8) $AE=EA=A$

Замечание: произведение двух отличных от нуля матриц может быть равно нуль-матрице, а для чисел нет.

Пример: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц, то есть если $C=AB$, то $|C|=|A|\cdot|B|$

Пример: пусть $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$C=AB=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$|A|$=5; $|B|$=-2; $|C|$=-10

$|A|\cdot|B|=|C|$.