# ЛЕКЦИЯ N26.
## Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Функциональные ряды.



### 1.Знакочередующиеся ряды.

Мы изучали ряды, все члены которых были положительны. Ряд, все члены которого отрицательны, не представляет нового по сравнению со знакоположительным рядом, так как он получается умножением членов знакоположительного ряда на *(-1).* Теперь перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные члены. Это знакопеременные ряды.

Например, $\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}-\frac{1}{7^3}+...+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^3}+\ldots$

Сначала рассмотрим частный случай знакочередующихся рядов, то есть рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный, потом положительный и так далее.

Считая, что $u_1, u_2, ..., u_n$ – абсолютные величины членов ряда и считая, что первый член положителен, запишем: $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots(-1)^{n-1}u_n+\ldots$ (1)

Теорема (признак) Лейбница.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ (2) и $u_n>u_{n+1}>0,\ n=1,\ 2,\ldots$ (3), то знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ сходится (4).

При этом любая частичная сумма $S_n$ ряда (4) отличается от его суммы $S$ на величину, меньшую следующего члена $u_{n+1}$, иначе говоря, абсолютная величина остатка ряда $r_n$ в этом случае не превышает абсолютной величины его первого отброшенного члена, то есть $|r_n|=|S-S_n|\le u_{n+1}$.

*Доказательство.* Рассмотрим частичные суммы порядка ряда (4) $S_{2k}=\sum\limits_{n=1}^{2k}(-1)^{n+1}u_n$ .

Их можно записать в виде $S_{2k}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2k-1}-u_{2k}),\ k=1,\ 2,\ldots$

В силу условия (3) выражения в круглых скобках неотрицательны и потому $S_{2k}\le S_{2k+2}$, то есть последовательность частичных сумм четного порядка ряда (4) возрастает.

Замечая, что частичные суммы $S_{2k}$ можно записать также в виде $S_{2k}=u_1-(u_2-u_3)-\ldots-(u_{2k-2}-u_{2k-1})-u_{2k},\ k=1,\ 2,\ldots$ и что выражения в круглых скобках неотрицательны, а $u_{2k}>0$, получаем, $S_{2k}<u_1$, то есть последовательность $\{S_{2k}\}$ ограничена сверху. Из монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности $\{S_{2k}\}$ следует, что она сходится: $\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}=S$ (5)

Покажем, что и частичные суммы нечетного порядка ряда (4) стремятся к тому же пределу.

$S_{2k+1}=S_{2k}+u_{2k+1},\ k=1,\ 2,\ldots$ (6) и так как $\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=0$, то в силу (5) и (6) имеем

$\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = S$ (7). Из (5) и (7) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Кроме того, для данного ряда справедливо неравенство $S_{2k} \le S \le S_{2k-1}$, $k=1, 2, \dots$

*Замечание.* Если условия чередования знаков ряда и монотонности будут выполняться не с первого члена, а лишь начиная с некоторого номера $n_0$, то при выполнении условия (2), рассматриваемый ряд будет сходиться. Это следует из того, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

*Пример.* Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - + \dots (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2} - \dots$

Решение. Ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $\frac{1}{1\cdot 2^2} > \frac{1}{2\cdot 3^2} > \frac{1}{3\cdot 4^2} > \dots > \frac{1}{n(n+1)^2} > \dots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} = 0$

следовательно, ряд сходится.

## 2.Знакопеременные ряды.

Рассмотрим ряд $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$, в котором числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Теорема. (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).

Если для знакопеременного ряда $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ (1) сходится ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots+|u_n|+\dots$ (2), составленный из абсолютных величин его членов, то данный ряд также сходится.

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательный ряд $\frac{u_1+|u_1|}{2} + \frac{u_2+|u_2|}{2} + \dots + \frac{u_n+|u_n|}{2} + \dots$

Имеем при $u_n>0 \Rightarrow u_n=|u_n|$ и $\frac{u_n+|u_n|}{2} = \frac{|u_n|+|u_n|}{2} = |u_n|$

При $u_n<0 \Rightarrow |u_n|=-u_n$ и $\frac{u_n+|u_n|}{2} = \frac{u_n+(-u_n)}{2} = 0$

Итак, члены ряда (3) либо равны членам сходящегося ряда (2), либо меньше их. Поэтому, ряд (3) сходится на основании первого признака сравнения.

Умножив све члены ряда (2) на ½, получим сходящийся ряд $\frac{|u_1|}{2} + \frac{|u_2|}{2} + \dots + \frac{|u_n|}{2} + \dots$ (4)

Рассмотрим еще один ряд: $\left(\frac{u_1+|u_1|}{2} - \frac{|u_1|}{2}\right) + \left(\frac{u_2+|u_2|}{2} - \frac{|u_2|}{2}\right) + \dots + \left(\frac{u_n+|u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2}\right) + \dots$ (5)

(он является разностью (3) и (4)).

Этот ряд также сходится (он является разностью сходящихся рядов) (а по теореме: сумма сходящихся рядов есть сходящийся ряд, то есть $S_1+(-S_2)$).

Но исходный ряд получается из (5) умножением всех его членов на 2: $2\cdot\left[\frac{u_n+|u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2}\right] = 2\frac{u_n}{2} = u_n$.

Поэтому, исходный ряд также сходится.

*Пример 1.* Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \dots$

Решение. Рассмотрим ряд $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$ - этот ряд сходится (как ряд Дирихле с $p>1$), поэтому сходится и исходный ряд.

Признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым.
*Например*, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ сходится по признаку Лейбница, однако ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ (то есть гармонический ряд) расходится.

**Определение.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают рядом важных свойств.

1) Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов.

*Замечание.* Если ряд сходится неабсолютно, то нельзя переставлять члены, так как может измениться сумма ряда и даже получиться расходящийся ряд.

2) Если ряд абсолютно сходится и $c$ – какое-либо число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ также абсолютно сходится.
3) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то их сумма $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ также абсолютно сходится.
4) Если ряды $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, и имеют сумму $A$ и $B$, то ряд, составленный из произведений

$$\begin{cases} u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 & ..u_iv_1 .. \\ u_1v_2 & u_2v_2 & u_3v_2 & ..u_iv_2 .. \\ .. & .. & .. & .. \;..\; .. \\ u_1v_k & u_2v_k & u_3v_k & ..u_iv_k .. \end{cases}$$

взятых в любом порядке, также сходится и имеет своей суммой произведение сумм $AB$. $\Sigma u\Sigma v=u_1v_1+u_2v_1+u_1v_2+u_2v_2+\ldots$

Итак, мы выяснили как оценить остаток знакочередующегося ряда, сходящегося по признаку Лейбница. Есть и оценки для других рядов.

Теорема. (об оценке остатка знакопеременного ряда). Пусть дан абсолютно сходящийся знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$

Тогда абсолютная величина его $n$-го остатка не превосходит $n$-го остатка ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда.

Теорема. (об остатке знакоположительного ряда). Если все члены сходящегося знакоположительного ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ (*) не превосходят соответствующих членов другого сходящегося знакоположительного ряда $v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$ (**), то $n$-ый остаток ряда (*) не превосходит $n$-го остатка ряда (**).

## 3.Признаки Даламбера и Коши для произвольных числовых рядов.

Если в случае числового ряда $u_n\neq 0,\ n=1, 2,\ldots,$ существует такое $q,\ 0<q<1,$ и такой номер $n_0$, что для всех $n\geq n_0$: $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\leq q$ или $\sqrt[n]{|u_n|}\leq q$, то согласно признаку Даламбера или Коши данный ряд сходится и притом абсолютно.

Если же $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq 1$ или $\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1$, то можно лишь утверждать, что ряд из абсолютных величин членов ряда $u_1+u_2+...+u_n+...$, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, что лишь означает, что данный ряд не сходится абсолютно.

На самом же деле из этих условий следует, что ряд вообще расходится (так как если последовательность $\{|u_n|\}$ не стремится к нулю, то и $\{u_n\}$ не стремится к нулю). Эти признаки расходимости тоже называют признаками расходимости Даламбера и Коши.

## 4. Функциональные ряды.

Рассмотрим теперь последовательности и ряды, членами которых являются некоторые комплекснозначные функции, то есть последовательность $f_n(x)$, $n=1, 2,...$ (1) и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (2).$$

При каждом фиксированном значении аргумента $x$ эти последовательности и ряды представляют собой числовые последовательности и ряды.

Пусть $E$ – некоторое множество элементов, в частности множество точек прямой, плоскости $n$-мерного пространства или вообще элементов произвольной природы, и пусть (1) – последовательность функций, которая определена на множестве $E$ и значениями которых являются комплексные числа.

**Определение.** Последовательность (1) называется ограниченной на множестве $E$, если существует такая постоянная $M>0$, что для всех $x\in E$ и всех $n=1, 2,...$ выполняются неравенства $|f_n(x)|\leq M$.

**Определение.** Последовательность (1) называется убывающей (возрастающей) на множестве $E$, если для всех $x\in E$ и всех $n=1, 2,...$ выполняются неравенства $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$ (или $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$).

**Определение.** Последовательность (1) называется сходящейся в точке $x_0\in E$, если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится.

Последовательность называется сходящейся на множестве $E$, если она сходится в каждой точке множества.

Если $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x\in E$, то говорят, что последовательность сходится к функции $f(x)$, $x\in E$.

**Определение.** Ряд (2) называется сходящимся в точке $x_0\in E$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Ряд (2) называется сходящимся на множестве $E$, если он сходится в каждой точке этого множества.

**Определение.** Ряд (2) называется абсолютно сходящимся на множестве $E$, если на множестве $E$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $u=1, 2,...$ - это $n$-ая частичная сумма ряда.

$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ - это $n$-ый остаток ряда. Тогда, $S(x)=S_n(x)+r_n$.

*Пример 1.* $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots,\ldots$ здесь $x$ – вещественное число. Определим сходимость.

Решение. Ряд сходится при всех $x$. Если $x\neq 0$, то мы имеем сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{1+x^2}$, $0<q<1$.

Тогда $S(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$

Если же $x=0$, то $u_n(x)=0$, $n=1, 2,\ldots$; $S(0)=0$.

$S(x)=\begin{cases} 0 \text{ для } x=0 \\ 1+x^2, \text{ для } x\neq 0 \end{cases}$.

Видим, что все члены ряда являются непрерывными функциями и ряд сходится во всех точках действительной оси, но его сумма является разрывной функцией.

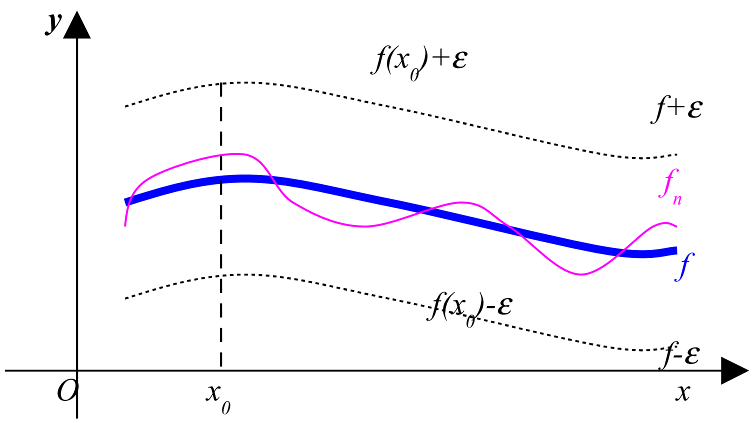
## Равномерная сходимость функциональных последовательностей.

**Определение.** Пусть задана последовательность функций (1) и функция $f(x)$, определенная на множестве $E$. Будем говорить, что последовательность сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве $E$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $n_\varepsilon$, что если $n\geq n_\varepsilon$, то для всех $x\in E$ существует неравенство $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Последовательность называется равномерно сходящейся на множестве, если существует функция $f(x)$, к которой она равномерно сходится на $E$. Если $\{f_n(x)\}$ сходится на $E$ к $f(x)$, то $f_n \underset{E}{\to} f$, если равномерно, то $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Сущность равномерной сходимости функции состоит в том, что для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать такой номер $n_\varepsilon$, зависящий только от $\varepsilon$ и не зависящий от выбора точки $x\in E$, что при $n\geq n_\varepsilon$ неравенство будет выполняться всюду на $E$, то есть «графики» функций $f_n$ будут расположены в «$\varepsilon$-полоске», окружающей график функции $f$.

Итак, при равномерной сходимости для любого $\varepsilon>0$ при всех достаточно больших $n$ $(n\geq n_\varepsilon)$ значения $f_n$ приближают функцию $f$ с погрешностью меньшей $\varepsilon$, сразу на всем множестве $E$.




Естественно понятие равномерной сходимости ввести для рядов.

**Определение.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого являются функциями, определенными на множестве $E$, называется равномерно сходящимся на этом множестве, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на $E$.

$S_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} S(x)$

Если $r_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, то $r_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Теорема. (необходимое условие сходимости ряда).

Если ряд (2) равномерно сходится на множестве $E$, то последовательность его членов $u_n(x)$, $n=1, 2,\ldots$ равномерно стремится к нулю на множестве $E$, то есть $u_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Или: у равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.

Теорема. (Признак Вейерштрасса). Пусть даны два ряда: функциональный (2), членами которого являются функции $u_n(x)\in E$ и числовой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ , $a_n\geq 0$, $n=1, 2,\ldots$ (3)

Если ряд (3) сходится и для любого $x\in E$ выполняется $|u_n(x)|\leq a_n$, $n=1, 2,\ldots$, то ряд (2) сходится на множестве $E$ абсолютно и равномерно.

*Доказательство.* Абсолютная сходимость ряда (2) в случае сходимости ряда (3) сразу следует по признаку сравнения из (4).

Пусть $S(x)$ – сумма ряда (4) и $S_n(x)$ – его частичная сумма. В силу сходимости ряда для любого $\varepsilon>0$ найдется $n_\varepsilon>0$, что для всех $n>n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} a_m < \varepsilon_0$

Но тогда для всех $n\geq n_\varepsilon$ и всех $x\in E$ для остатков $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ ряда (2) будем иметь $|S(x)-S_n(x)|=|r_n(x)|=|\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} u_m(x)|\leq \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} a_m < \varepsilon$ , что и означает равномерную сходимость ряда (2).

Ряд (3) называется мажорирующим для данного ряда.

*Пример.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^3}$

Сравним $\frac{1}{n^3}$ - сходится. $\frac{\sin nx}{1+n^3} \leq \frac{1}{1+n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ . Значит, сходимость равномерная.

## Свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема. Если функции $u_n(x)$, $n=1, 2,\ldots$ непрерывны в точке $x_0$ множества $E$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $E$, то его сумма $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также непрерывна в точке $x_0$.

Теорема. Пусть функции $u_n(x)$, $n=1, 2,\ldots$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда, какова бы ни была точка $c\in[a, b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^x u_n(t)dt$ также равномерно сходится на $[a, b]$ и если $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то $\int\limits_c^x S(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^x u_n(t)dt$, $a\leq x\leq b$.

Или $\int\limits_c^x [\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)]dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^x u_n(t)dt$, что и означает законность почленного интегрирования ряда.

Теорема. Пусть функции $u_n(x)$, $n=1, 2,\ldots$ непрерывно дифферецируемы на отрезке $[a, b]$ и ряд, составленный из их производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{/}(x)$ равномерно сходится на *[a, b]*.

Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке *c*∈*[a, b]*, то он сходится равномерно на всем отрезке *[a, b]*, его сумма $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывно дифференцируема и $S^{/}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{/}(x)$. Можно записать так: $[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)]^{/} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{/}(x)$, что означает законность почленного дифференцирования ряда.