

ЛЕКЦИЯ N25.

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости рядов с положительными членами. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

1. Числовые ряды	1
2. Основные теоремы	2
3. Необходимый признак сходимости ряда	3
4. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов	3

1. Числовые ряды.

Выражаясь чисто описательно, можно сказать, что ряд есть алгебраическая сумма бесконечного числа слагаемых. Всякий ряд имеет вид:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots + \dots \quad (1),$$

причем написанное выражение не имеет последнего члена, но за каждым из слагаемых имеется следующее слагаемое. Ряд (1) называется бесконечным рядом, а числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ - членами ряда.

Станем последовательно складывать члены ряда, составляя суммы: $S_1 = u_1$; $S_2 = u_1 + u_2$; $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$; ... $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (2). Их называют частичными суммами ряда. Вместо

ряда (1) часто пишут $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (3).

Итак, сложение определенного числа слагаемых дает всегда определенный результат, но прибавление одного за другим членов ряда не может дать никакого, вообще говоря, результата.

По существу, имея дело с бесконечным количеством действий, мы не можем рассчитывать на получение окончательного результата.

Например, в случае ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, начиная с первого члена и прибавляя к результату одно следующее число, мы будем получать частичные суммы: $1; \frac{3}{2}; \frac{7}{4}; \frac{15}{8}; \dots$

Представим их так: $2-1; 2-\frac{1}{2}; 2-\frac{1}{4}; 2-\frac{1}{8}; \dots$. Видим, что эти суммы все меньше отличаются от числа 2. Вот это число 2 и называют суммой ряда и пишут $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$.

Возникает вопрос, всякий ли ряд имеет определенную сумму, то есть являются ли частичные суммы всякого ряда все более и более точными приближенными значениями некоторого числа?

Простой пример показывает, что это не так: $1-1+1-1+1-1\dots$

Вычисляем частичные суммы для этого ряда: $1; 0; 1; 0; 1; 0; \dots$

Значит, этот ряд суммы не имеет.

Ряды, имеющие определенную сумму, называют сходящимися, а не имеющие определенной суммы, расходящимися.

Определение. Если частичная сумма S_n ряда (1) при $n \rightarrow \infty$, имеет предел S , конечный или бесконечный (но определенного знака).

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то этот предел называют суммой ряда и пишут $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Если ряд имеет конечную сумму, то он называется сходящимся, в противном случае - расходящимся.

Замечание. В XVIII веке понятие сходимости ряда не было еще установлено и математики весьма часто оперировали и с расходящимися рядами, приписывая им определенные суммы.

Так, например, рассматривая ряд $1-1+1-1+\dots$ обозначали сумму его через S .

$$1-1+1-1+1-\dots=S.$$

Переносим единицу $-1+1-1+1-1+\dots=S-1$.

Но ряд, стоящий слева, только знаками отличается от исходного, то есть $-S=S-1$ или

$$1=2S \Rightarrow S=\frac{1}{2}.$$

С помощью других подходов можно было получить другой результат, например, $\frac{1}{3}$.

Подобные противоречия встречались тогда весьма часто. Интересная дискуссия, касавшаяся суммирования расходящихся рядов, длилась целое столетие.

Например, итальянец Гранди замечает, что ряд $1-1+1-1+\dots$ можно суммировать попарно.

И получает следующий результат $0+0+0+0+0+\dots=\frac{1}{2}$ и вместо того, чтобы подвергнуть

критике результат, каким было получено число $\frac{1}{2}$ он пишет, что вывод $0=\frac{1}{2}$ есть символ создания мира из ничего.

Правда, были и в XVIII веке работы, в которых давалось почти современное определение сходимости рядов (английский математик Варинг в 1781 году), но не они определяли в то время развитие теории рядов, и только благодаря критическим работам Коши и Абеля, расходящиеся ряды перестали употреблять, и вернулись к ним только через 40 лет, но уже на другой основе.

Пример. простейшим примером бесконечного ряда является геометрическая прогрессия $a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}+\dots$

Ее частичная сумма будет (если $q \neq 1$) $S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$.

Если знаменатель прогрессии $|q| < 1$, то S_n имеет конечный предел $S = \frac{a}{1 - q}$, то есть ряд сходится и S будет его суммой. Если $|q| \geq 1$, то ряд расходится.

2. Основные теоремы.

Если в ряде (1) отбросить первые m членов, то получим ряд: $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$

(3), называемый остатком ряда (1) после m -го члена.

Теорема 1. Если сходится ряд (1), то сходится и любой из его остатков, обратно, из сходимости остатка вытекает сходимость исходного ряда.

Доказательство. Фиксируем m и обозначаем k -ую частичную сумму ряда S через A_k :

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}. \text{ Тогда, очевидно, } A'_k = A_{m+k} - A_m$$

Если ряд (1) сходится, так что $A_n \rightarrow A$, то при безграничном возрастании k , существует конечный предел $A' = A - A_m$ и для сумм A'_k , что и означает сходимость ряда (3).

Обратное доказывается аналогично.

Итак, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда.

Теорема 2. Если члены сходящегося ряда умножить на один и тот же множитель c , то его сходимость не нарушится, а сумма лишь умножится на c .

Доказательство. В самом деле, частичная сумма $\bar{S}_n$ ряда $cu_1+cu_2+cu_3+\dots+cu_n+\dots$ очевидно, равна $\bar{S}_n=cu_1+cu_2+\dots+cu_n=c(u_1+u_2+\dots+u_n)=c\bar{S}_n$ и имеет пределом cS .

Теорема 3. Даны два сходящихся ряда $A=a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$; $B=b_1+b_2+\dots+b_n+\dots$

Их можно почленно складывать и вычитать, так что ряд $(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\dots+(a_n\pm b_n)+\dots$ также сходится и его сумма равна, соответственно $A\pm B$.

Доказательство. Если A_n ; B_n и C_n обозначают частичные суммы упомянутых рядов, то очевидно, $C_n=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\dots+(a_n\pm b_n)=(a_1+a_2+\dots+a_n)\pm(b_1+b_2+\dots+b_n)=A_n\pm B_n$

Переходя к пределу, найдем, что $\lim C_n=\lim A_n\pm\lim B_n$.

3.Необходимый признак сходимости ряда.

Теорема. Если ряд $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n .

Доказательство. Пусть дан сходящийся ряд $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$, имеющий сумму S . Рассмотрим его частичные суммы $S_n=u_1+u_2+\dots+u_{n-1}+u_n$; $S_{n-1}=u_1+u_2+\dots+u_{n-1}$.

Отсюда, $u_n=S_n-S_{n-1}$.

Следовательно, $\lim_{n\rightarrow\infty} u_n = \lim_{n\rightarrow\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\rightarrow\infty} S_n - \lim_{n\rightarrow\infty} S_{n-1}$

Но, $\lim_{n\rightarrow\infty} S_n = S$ и $\lim_{n\rightarrow\infty} S_{n-1} = S$, так как при $n\rightarrow\infty$ и $n-1\rightarrow\infty$.

Поэтому, $\lim_{n\rightarrow\infty} u_n = S - S = 0$. Итак, $\lim_{n\rightarrow\infty} u_n = 0$.

Следствие. (достаточный признак расходимости ряда). Если общий член ряда не стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера n , то ряд расходится.

Условие $\lim_{n\rightarrow\infty} u_n = 0$ является необходимым для сходимости ряда, но не достаточным. Это

означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n\rightarrow\infty} u_n = 0$.

Пример. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

Здесь $\lim_{n\rightarrow\infty} u_n = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Но легко показать, что этот ряд расходится. Рассмотрим частичную сумму ряда.

$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Так как $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, то очевидно, что $S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, или $S_n > n \cdot$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$, то есть $S_n > \sqrt{n}$. Отсюда следует, что $\lim_{n\rightarrow\infty} S_n = \infty$ и, следовательно, ряд расходится.

4.Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Итак, сумма ряда – это предел последовательности его частичных сумм: $S = \lim_{n\rightarrow\infty} S_n$. Однако, нахождение этого предела во многих случаях связано с большими трудностями. Сумму ряда находят приближенно, заменяя ее частичной суммой S_n' с достаточно большим номером n . Но для этого надо быть уверенным, что ряд сходится.

Рассмотрим достаточные признаки сходимости и расходимости для рядов с положительными членами. Эти ряды называются знакоположительными.

Замечание. Так как в знакоположительном ряде все члены положительные, то его частичные суммы $S_1=u_1$; $S_2=u_1+u_2$ и так далее возрастают с увеличением номера n , то есть $S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_n < \dots$

Возможны два случая:

- 1) Последовательность частичных сумм неограничена, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ и ряд расходится.
- 2) Последовательность частичных сумм ограничена, то есть $S_n < C$ при любом n . В этом случае последовательность частичных сумм имеет предел и ряд сходится.

Первый признак сравнения.

Даны два знакоположительных ряда $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ (4); $v_1+v_2+v_3+\dots+v_n+\dots$ (5).

Часть I. Пусть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2, u_3 \leq v_3, \dots, u_n \leq v_n, \dots$ (6) и второй ряд сходится. В таком случае первый ряд также сходится и его сумма не превосходит суммы второго ряда.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n соответственно n -ые частичные суммы первого и второго рядов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n; \quad \sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

Из (6) следует, что $S_n \leq \sigma_n$. Так как ряд (5) сходится, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$. При этом, так как члены ряда положительны, то $\sigma_n < \sigma$, а, следовательно, $S_n < \sigma$.

Итак, частичные суммы ряда (4) ограничены и, следовательно, ряд (4) сходится, причем его сумма не превосходит суммы ряда (5), как это следует из неравенства $S_n < \sigma$.

Часть 2. Пусть члены первого ряда не меньше соответствующих членов второго ряда $u_1 \geq v_1; u_2 \geq v_2; u_3 \geq v_3; \dots u_n \geq v_n \geq \dots$ и второй ряд расходится. В таком случае первый ряд также расходится.

Второй признак сравнения.

Пусть даны ряды (4) и (5). Тогда, если существует ненулевой предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} = A \neq 0$, то ряды (4) и (5) либо сходятся одновременно, либо расходятся одновременно.

Для установления сходимости с помощью признаков сравнения необходимо наличие рядов, о которых известно, как они себя ведут.

Один из рядов известен – геометрическая прогрессия. Еще один ряд:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

Далее мы покажем, что этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leq 1$. При $p = 1$ получим ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, который называется гармоническим. А предыдущий ряд называется обобщенным гармоническим или рядом Дирихле.

Признак Даламбера сходимости знакоположительных рядов.

Сравнение данного ряда с различными стандартными рядами, заведомо сходящимися или расходящимися, не всегда может быть проведено. Поэтому часто используют другие достаточные признаки сходимости, например признак Даламбера. Если для знакоположительного ряда $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ (1) существует предел отношения последующего члена к предыдущему при неограниченном возрастании номера члена n , то

есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$, то при $D < 1$ ряд сходится, а при $D > 1$ ряд расходится.

Доказательство. Пусть $D < 1$. Покажем, что ряд (1) сходится. Действительно, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$, то на основании предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое натуральное N , зависящее от ε , что для всех членов ряда, для которых номер $n \geq N$ выполняется неравенство $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - D \right| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что $-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - D < +\varepsilon$ или $D - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < D + \varepsilon$.

Пусть $D + \varepsilon = q$, получим $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$. Так как $D < 1$, а ε - произвольно мало, то ε можно выбрать

таким малым, чтобы $q = D + \varepsilon < 1$. Поэтому, для $n \geq N$ имеем: $\frac{u_{N+1}}{u_N} < q, \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < q, \dots$, то есть

$$u_{N+1} < u_N q; u_{N+2} < u_{N+1} q < u_N q^2, u_{N+3} < u_{N+2} q < u_N q^3, \dots$$

Рассмотрим ряды $u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$ (2); $u_N + u_N q + u_N q^2 + u_N q^3 + \dots$ (3)

Ряд (3) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $|q| < 1$. А так как все члены (2) не превосходят соответствующих членов (3), то на основании первого признака сравнения ряд (2) также сходится.

Но ряд (2) получается из (1) отбрасыванием конечного числа членов; следовательно и ряд (1) сходится.

При $D > 1$ расходимость прямо вытекает из нарушения необходимого условия сходимости:

ведь, если $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ или $u_{n+1} > u_n$, то u_n не может стремиться к нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

При $D = 1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. Здесь может иметь место и сходимость, и расходимость.

Замечание. Даламбер – (1717-1783) – французский математик, J. d'Alembert.

Пример. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^3} + \frac{7}{5^4} + \dots + \frac{2n-1}{5^n} + \dots$

Решение. $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-1}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{2n-1} = \frac{1}{5} < 1$ - ряд сходится.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Здесь $u_n = \frac{1}{n!}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Ряд сходится {или путем сравнения с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ }.

Радикальный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.

Если для знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ (4) существует предел корня n -ой степени общего члена при неограниченном возрастании номера члена, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C$, то при $C < 1$ ряд сходится, а при $C > 1$ ряд расходится.

Доказательство. Пусть $C < 1$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C$ и на основании определения предела для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое натуральное число N , зависящее от ε , что для всех членов ряда, номер которых $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\left| \sqrt[n]{u_n} - C \right| < \varepsilon. \text{ Отсюда, } -\varepsilon < \sqrt[n]{u_n} - C < +\varepsilon \text{ или } C - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < C + \varepsilon.$$

Пусть $C + \varepsilon = q$, тогда $\sqrt[n]{u_n} < q$, так как $C < 1$, а ε произвольно мало, то ε можно выбрать настолько малым, чтобы $q = C + \varepsilon < 1$. Итак, при $n \geq N$ имеем $\sqrt[n]{u_n} < q$; $u_n < q^n$.

Тогда, по признаку сравнения ряд (3) сходится, так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ (геометрическая прогрессия $|q| < 1$).

Значит, сходится и (4), так как ряд $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ получен отбрасыванием конечного числа своих членов. Если же $C > 1$, то $\sqrt[n]{u_n} > 1$, значит $u_n > 1$, то есть не выполняется необходимый признак сходимости и ряд (4) расходится.

При $C = 1$ сделать заключение о сходимости ряда нельзя.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$. По признаку Коши: $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$, поэтому ряд сходится.

Пример. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

По признаку Даламбера $D_1 = 1$, $D_2 = 1$; по признаку Коши $C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

Но $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

Решение. $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$, ряд сходится.

Интегральный признак Коши.

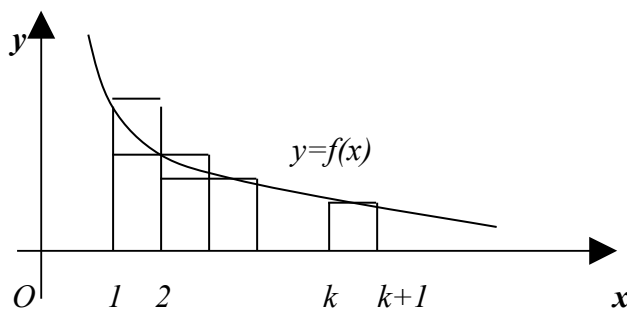
Если для данного ряда (1) удастся подобрать функцию, определенную при $x \geq 1$ и такую, что $f(n) = u_n$, то при определенных условиях по сходимости или расходимости интеграла

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ можно судить о сходимости или расходимости ряда (1).

Теорема. Если функция $f(x)$, определенная при всех $x \geq 1$, неотрицательна и убывает, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ (5)

Доказательство. Если $k \leq x \leq k+1$, то в силу убывания функции $f(x)$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$, $k = 1, 2, \dots$



Поэтому, интегрируя по отрезку $[k; k+1]$ будем иметь $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$, $k = 1, 2, \dots$

Суммируя эти неравенства от $k=1$ до $k=n$, получим $\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1)$, и, полагая,

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k), \text{ будем иметь } S_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq S_{n+1} - f(1), n=1, 2, \dots \quad (6)$$

Если же интеграл (5) сходится, то при любом $n=1, 2, \dots$ $\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Отсюда и из (6) следует, что $S_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x) dx$, то есть последовательность частичных сумм ряда ограничена сверху, а, значит, ряд сходится.

Пример. Рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ с n -ым членом $u_n = 1/n^p$, $n=1, 2, \dots$

В данном случае функция $f(x)$ подбирается легко $f(x) = 1/x^p$, $x \geq 1$.

Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$, то и ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$$

Рассмотрим интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$. Заменяя $\ln(x+1)=t$, $d(\ln(x+1))=dt$, $\frac{dx}{x+1} = dt$.

А этот интеграл расходится, поэтому и ряд расходится.