ЛЕКЦИЯ N 43.

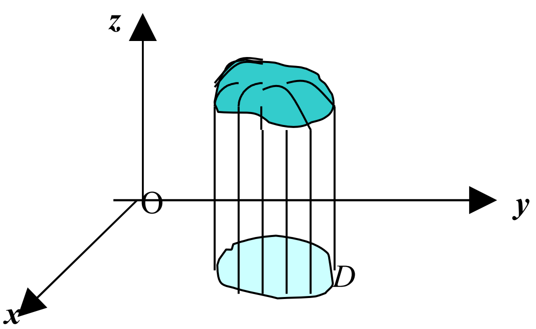
Кратные интегралы. Алгоритм построения. Свойства. Вычисление в декартовых координатах.

1.Двойные интегралы.

Перейдем к изложению интегрального исчисления для функций нескольких независимых переменных. К понятию двойного интеграла придем, исходя из конкретной геометрической задачи.

Рассмотрим тело, ограниченное некоторой поверхностью. Поставим задачу об объеме этого тела. Тело назовем «цилиндрическим» и отнесем к декартовой системе координат.

Определение. Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное плоскостью *Oxy,* поверхностью, с которой любая прямая, параллельная оси *Oz,* пересекается не более чем в одной точке, и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси *Oz*.



Область *D*, высекаемая в плоскости *Oxy* цилиндрической поверхностью, называется основанием цилиндрического тела. Основание цилиндрического тела – ортогональная проекция поверхности, ограничивающей тело, на плоскость *Oxy*.

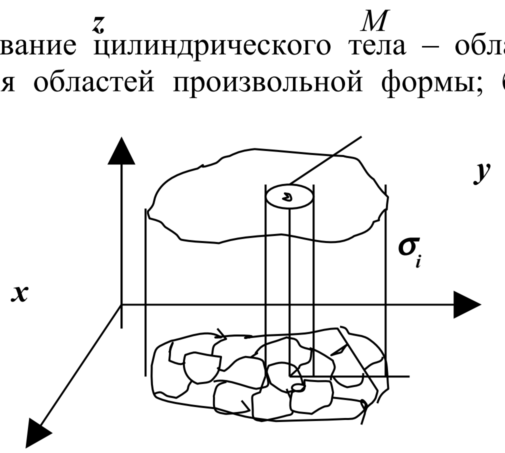
Обычно тело можно составить из таких цилиндрических тел и искомый объем определить как сумму объемов цилиндрических тел, составляющих это тело.

Напомним:

1) Если разбить тело на части, то его объем будет равен сумме объемов всех частей (свойство аддитивности);
2) объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостью, параллельной плоскости *Oxy*, равен площади основания, умноженной на высоту тела.

Пусть $z=f(x, y)$ есть уравнение поверхности, ограничивающей цилиндрическое тело. Будем считать $f(x, y)$ непрерывной функцией точки $P(x, y)$ в области *D* и вначале предположим, что поверхность целиком лежит над плоскостью *Oxy*, то есть что $f(x, y)>0$ всюду в области *D.*

Разобьем основание цилиндрического тела – область *D* – на некоторое число *n* неперекрывающихся областей произвольной формы; будем называть их частичными областями.



Обозначим эти области $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, а их площади - $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Через границу каждой частичной области проведем цилиндрическую поверхность (с образующей параллельной оси Oz). Эти цилиндрические поверхности разрежут поверхность на n кусков, соответствующих n частичным областям, то есть тело окажется разбитым на n частичных цилиндрических тел. Подсчитать объем частичного цилиндрического тела тоже трудно. Но основания тел при разбиении уменьшились. Можно потребовать, чтобы диаметры частичных областей стремились к нулю. При этом диаметром конечной области называется наибольшее расстояние между точками ее границы.

Теперь, вместо данной поверхности возьмем в качестве поверхности, ограничивающей i-ый частичный цилиндр, кусок плоскости, параллельной плоскости Oxy и проходящей от нее на расстоянии, равном какой-нибудь аппликате замененной части поверхности.
В результате получится n-ступенчатое тело, объем которого V_n можно найти.

Найдем объем i-го цилиндра. Высота его равна значению функции $z=f(x, y)$ в некоторой точке области σ_i. Обозначим ее через $P_i(\xi_i, \eta_i)$.
Значит объем i-го цилиндра: $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_I$ $(=f(P_i)\Delta\sigma_i)$.

Поэтому, $V_n=f(\xi_1, \eta_1)\Delta\sigma_1+f(\xi_2, \eta_2)\Delta\sigma_2+\dots+f(\xi_n, \eta_n)\Delta\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ (1).

Очевидно, что V_n тем точнее отражает объем V исходного тела, чем меньше наибольший из диаметров частичных областей и, значит, чем больше n.

Поэтому, по определению, принимаем искомый объем V равным пределу, к которому стремится сумма (1) при $n\to\infty$ и стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей.
Сумма (1) называется n-ой интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D, соответствующей данному разбиению этой области на n частичных.
Определение. Предел, к которому стремится n-ая интегральная сумма (1) при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей, называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D.

Записывается так: $lim\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(P)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$; $f(P)d\sigma$ - подынтегральное выражение, $f(P)$ – подынтегральная функция, D – область интегрирования, x, y – переменные интегрирования.

Итак, объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостью Oxy, поверхностью $z=f(x, y)$ $(f(x, y)>0)$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz; определяется двойным интегралом от аппликаты поверхности, то есть от функции $f(x, y)$, взятым по области, являющейся основанием цилиндрического тела: $V=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

Определение двойного интеграла можно распространить на любую непрерывную в области D функцию $z=f(x, y)$ и без ограничения $f(x, y)>0$.
<u>Теорема существования двойного интеграла.</u> n-ая интегральная сумма, соответствующая конечной области D изменения точки $P(x, y)$ и непрерывной в этой области функции $f(P)$, стремится к пределу при $n\to\infty$ и стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей. Этот предел не зависит ни от способа подразделения области D на частичные области, ни от того, какие точки в частичных областях принимаются в качестве точек P_i Он называется двойным интегралом от функции $f(P)$ в области D.
Двойной интеграл представляет собой число, зависящее только от подынтегральной функции и области интегрирования, и вовсе не зависящее от обозначений переменных интегрирования $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(u,v)d\sigma$

2.Связь между обыкновенным и двойным интегралом.

Аналогия между ними очевидна и еще более наглядна, если рассматривать функции как одной, так и двух независимых переменных как функции точки.

Тогда интегральная сумма для функции одной независимой переменной *f(P)=f(x)* запишется так: $I_n=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$, где Δl_i – длина l-го частичного интервала, а P_i – произвольная точка в этом интервале (нужно заметить, что вообще Δl_i – число, имеющее знак, но мы пока не будем принимать его во внимание и будем считать Δl просто элементом длины.

Интеграл от *f(P)* в заданном интервале L можно обозначить символом $I=\int_L f(P)dl$ (2), где dl – элемент длины в интервале L (L и будет областью интегрирования).

Если мы теперь сравним этот интеграл и двойной, то заметим, что разница между ними заключается не в символике и конструкции формул, а в характере области изменения точки P, и в вытекающем отсюда характере суммирования. В интеграле (2) точка P перемещается вдоль оси независимой переменной, и элемент интеграла получается умножением значения функции на элемент длины области интегрирования. Поэтому, обыкновенный интеграл называется одномерным или прямолинейным. В двойном интеграле переменная точка интеграции P перемещается по плоскости независимых переменных, и элемент интеграла получается умножением значения функции на элемент площади области интегрирования. Поэтому интеграл называют двойным (двумерным).

Исходя из сказанного, для обоих интегралов можно дать общее определение.

Определение. Интегралом I от функции *f(P)* в конечной области W, в которой функция непрерывна, называется предел n-ой интегральной суммы $I_n=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\omega_i$ при $n\to\infty$ и стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей ω_i. При этом интегральная сумма I_n составлена для произвольного разбиения области W на n частичных областей, P_i – есть произвольная точка i-ой частичной области, а $\Delta\omega_i$ – означает меру этой области.

Это определение может быть распространено на функции любого числа независимых переменных. И определенный таким образом интеграл называется многомерным.

Пусть W – область Ω пространства трех независимых переменных, в которой изменяется переменная точка интеграции *P(x, y, z),* тогда $\Delta\omega_I$ – есть объем Δv_i частичной области v_i, $d\omega$ - дифференциал dv этого объема. Тогда получим интеграл $I=\iiint_\Omega f(P)dv = \iiint_\Omega f(x,y,z)dv$, который называется тройным (трехмерным).

Терминология и теорема существования такие же, как у двойного.

3.Основные свойства двойного и тройного интеграла.

Теорема 1. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций:

$$\iint_D [f(P)+\varphi(P)+\ldots+\psi(P)] = \iint_D f(P)d\sigma + \iint_D \varphi(P)d\sigma + \ldots + \iint_D \psi(P)d\sigma .$$

Теорема 2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ двойного интеграла $\iint_D cf(P)d\sigma = c\iint_D f(P)d\sigma$

Эти теоремы доказываются сразу, если применить известные правила предельного перехода к соответствующим интегральным суммам.

Теорема 3. Если подынтегральная функция в области интегрирования не меняет знака, то двойной интеграл представляет собой число того же знака, что и функция.

Доказательство. Пусть $f(P)\geq 0$ в области D. Тогда в интегральной сумме $I_n=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$ все слагаемые неотрицательны и, значит, $I_n\geq 0$, а предел неотрицательной величины не может быть отрицательным. Интеграл же от непрерывной знакопостоянной функции $f(P)$ может быть равен нулю только тогда, когда $f(P)$ тождественно равна нулю.

Если подынтегральная функция в области интегрирования меняет знак, то интеграл от нее может быть и положительным числом, и отрицательным, и равным нулю.

Теорема 4. Если область интегрирования D разбита на две части D_1 и D_2, то $\iint\limits_D f(P)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(P)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(P)d\sigma$.

Доказательство. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области D, то мы можем разбивать область D так, чтобы каждая частичная область σ_I содержалась либо целиком в D_1, либо целиком в D_2; тогда подынтегральную сумму можно представить так: $\sum f(P_i)\Delta\sigma_i = \sum{}_1 f(P_i)\Delta\sigma_i + \sum{}_2 f(P_i)\Delta\sigma_i$, где в первой сумме в правой части собраны все элементы, соответствующие частичным областям, принадлежащим D_1, и во второй сумме – элементы, принадлежащие D_2. Переходя к пределу при условии, что наибольший из диаметров частичных областей стремится к нулю, получим (3).

Отсюда следует также, что если область D разбить на k областей $D_1, D_2,\ldots, D_k$, то $\iint\limits_D f(P)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(P)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(P)d\sigma + \ldots + \iint\limits_{D_k} f(P)d\sigma$

Теорема 5. Значение двойного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений подынтегральной функции на площадь области интегрирования, то есть $mS\leq \iint\limits_D f(P)d\sigma \leq MS$, где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(P)$ в области D, а S – площадь D.

Доказательство. Рассмотрим функции $M-f(P)$ и $m-f(P)$. Первая из них в области D неотрицательна, вторая неположительна.

Значит, по свойству 3: $\iint\limits_D [M-f(P)]d\sigma \geq 0; \iint\limits_D [m-f(P)]d\sigma \leq 0$, то есть $\iint\limits_D Md\sigma \geq \iint\limits_D f(P)d\sigma; \iint\limits_D md\sigma \leq \iint\limits_D f(P)d\sigma$

Откуда, $m\iint\limits_D d\sigma \leq \iint\limits_D f(P)d\sigma \leq M\iint\limits_D d\sigma$, но $\iint\limits_D d\sigma = \lim\sum\Delta\sigma_i = \lim S = S$.

Поэтому, зная наибольшее и наименьшее значения подынтегральной функции, можно не вычисляя двойного интеграла, оценить его величину.

Вернемся к геометрической интерпретации двойного интеграла. Условимся объему цилиндрического тела, расположенного над плоскостью Oxy, приписывать знак плюс, а расположенного под плоскостью Oxy – знак минус.

Поэтому, в дальнейшем двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ можем интерпретировать независимо от конкретного смысла переменных x, y и функции $f(x, y)$ как объем (алгебраический), а не геометрический, цилиндрического тела с основанием D, ограниченного поверхностью $z=f(x, y)$.

Если же нужно отыскать истинный объем цилиндрического тела, то для этого нужно отдельно вычислить интеграл, выражающий объем части тела, расположенной над плоскостью Oxy и под плоскостью Oxy, а затем взять сумму абсолютных величин этих интегралов.

Заметим, что геометрически свойство 5 выражается в том обстоятельстве, что объем цилиндрического тела больше объема цилиндра с тем же основанием и высотой, равной наименьшей аппликате ограничивающей поверхности, и меньше объема цилиндра с тем же основанием и высотой, равной наибольшей аппликате поверхности.

Теорема 6. Двойной интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой средней точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint_D f(P)d\sigma = f(P_c)S = f(\xi,\eta)S$$

Значение *f(P_c)*, получаемое по формуле $\frac{1}{S}\iint_D f(P)d\sigma = f(P_c)$, называется средним значением функции *f(P)* в области *D*.

Доказательство. Известно, что $mS \le \iint_D f(P)d\sigma \le MS$ или $m \le \frac{1}{S}\iint_D f(P)d\sigma \le M$

А так как функция *f(P)* обязательно принимает в некоторой точке $P_c(\xi, \eta)$ области *D* значение, равное числу, заключенному между наименьшим и наибольшим значениями, то $\frac{1}{S}\iint_D f(P)d\sigma = f(P_c)$. Значит, $\iint_D f(P)d\sigma = f(P_c)S = f(\xi,\eta)S$, что и требовалось доказать.