

ЛЕКЦИЯ N22.

Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

1.Инвариантность формы дифференциала.....	1
2.Дифференциалы сложных функций.....	1
3.Неявные функции и их дифференцирование.....	2
4.Формула Тейлора.....	3

1.Инвариантность формы дифференциала.

Пусть функция $u=f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные u'_x, u'_y, u'_z , причем x, y, z в свою очередь являются функциями от новых переменных t и v : $x=\varphi(t, v)$, $y=\psi(t, v)$, $z=\chi(t, v)$, также имеющими непрерывные частные производные $x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v$. Тогда не только существуют производные от сложной функции u по t и v , но эти производные также непрерывны по t и v .

Если бы x, y и z были независимыми переменными, то, как мы знаем, полный дифференциал функции был бы равен $du=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz$

Но в данном случае u зависит через x, y, z от t и v .

Значит

$$du=u'_t dt+u'_v dv,$$

но $u'_t=u'_x \cdot x'_t+u'_y \cdot y'_t+u'_z \cdot z'_t$; $u'_v=u'_x \cdot x'_v+u'_y \cdot y'_v+u'_z \cdot z'_v$.

Подставим: $du=(u'_x \cdot x'_t+u'_y \cdot y'_t+u'_z \cdot z'_t)dt+(u'_x \cdot x'_v+u'_y \cdot y'_v+u'_z \cdot z'_v)dv$;

Сгруппируем члены:

$$du=u'_x(x'_t dt+x'_v dv)+u'_y(y'_t dt+y'_v dv)+u'_z(z'_t dt+z'_v dv)=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz,$$

что и требовалось доказать.

Мы пришли к той же самой форме дифференциала, что и в случае, когда x, y, z были независимыми переменными (но смысл символов dx, dy, dz здесь уже другой!).

Пример. $u=\arctg \frac{x}{y}$

$$du=(\arctg \frac{x}{y})'_x dx+(\arctg \frac{x}{y})'_y dy=\frac{y}{x^2+y^2} dx+(-\frac{x}{x^2+y^2})dy$$

2.Дифференциалы сложных функций.

Пусть мы теперь имеем сложную функцию $u=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$, ($i=1, 2, \dots, m$).

В этом случае первый дифференциал сохраняется в том же виде.

Но здесь уже $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ являются дифференциалами не независимых переменных, а функций, и, следовательно, сами будут функциями и могут не быть постоянными, как раньше.

Вычисляя второй дифференциал, будем иметь

$$\begin{aligned} d^2 u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 + d \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + d \left(\frac{\partial u}{\partial x_m} \right) dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_1} d(dx_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} d(dx_2) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} d(dx_m) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 u + \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} d^2 x_m \end{aligned}$$

Мы видим, что для дифференциала порядка выше первого инвариантность формы вообще не имеет места.

Рассмотрим случай, когда $x_1, x_2, \dots, x_m$ являются линейными функциями от $t_1, t_2, \dots, t_k$, то есть когда $x_i = \alpha_i^{(1)}t_1 + \alpha_i^{(2)}t_2 + \dots + \alpha_i^{(k)}t_k + \beta_i, (i=1, 2, m)$, где $\alpha_i^{(j)}$ и $\beta_i - const$.

Тогда $dx_i = \alpha_i^{(1)}dt_1 + \dots + \alpha_i^{(k)}dt_k = \alpha_i^{(1)}\Delta t_1 + \dots + \alpha_i^{(k)}\Delta t_k$.

Видим, что все первые дифференциалы в этом случае постоянны.

Отсюда вытекает, что в случае замены независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейными функциям от новых переменных $t_1, t_2, \dots, t_k$ могут быть сохранены прежние выражения для дифференциалов высших порядков.

3. Неявные функции и их дифференцирование.

Мы знаем, что уравнение: $F(x, y) = 0$ (1), где $F(x, y)$ – функция двух переменных, определяет на множестве M , где $x \in M$, неявную функцию $y = \varphi(x)$.

Замечание. Не всякое уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает неявную функцию.

Например, уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x и y , и оно не определяет никакой неявной функции.

Каким же условиям должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ определяло единственную неявную функцию y ?

Теорема существования неявной функции.

Если функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ и при этом $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ единственную неявную функцию $y = y(x)$, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0 , причем $y(x_0) = y_0$.

Рассмотрим вопрос о дифференцировании данной функции.

Пусть левая часть уравнения (1) удовлетворяет указанным в теореме условиям. Тогда это уравнение определяет неявную функцию $y = y(x)$, для которой в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ имеет место тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ относительно x .

Так как производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю, то полное производная $\frac{dF}{dx} = 0$ (2).

Найдем производную от функции $z = F(x, y)$, при условии, что $y = \varphi(x)$:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Из (2) ясно:
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

тогда
$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

По этой формуле и находят производную.

Пример. $y'_x = ?$ $x^2y - 2x \cos xy + \sin \frac{x}{y} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy - 2 \cos xy + 2xy \sin xy + \cos \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2x^2 \sin xy + \cos \frac{x}{y} \left(-\frac{1}{y^2}\right), \quad \text{тогда} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

4. Формула Тейлора.

Мы знаем, что функция $F(t)$ при условии существования ее $(n+1)$ первых производных в окрестности точки t_0 может быть следующим образом разложена по формуле Тейлора:

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!} d^2 F(t_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(t_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(t_0 + \theta \Delta t); \quad 0 < \theta < 1.$$

При этом нужно помнить, что величина dt , входящая в различных степенях в выражение дифференциалов справа, в точности равна тому приращению Δt , которое фигурирует в приращении функции слева: $\Delta F(t_0) = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)$.

Именно в записанной форме, формула Тейлора распространяется и на случай функции нескольких переменных.

Ограничимся функцией $f(x, y)$ двух переменных.

Предположим, что в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) эта функция имеет непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$ -го включительно.

Придадим x_0 и y_0 некоторые приращения Δx и Δy так, чтобы прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, не вышел за пределы рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) .

Нужно доказать, что при сделанных предположениях относительно функции $f(x, y)$ справедливо следующее равенство:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y); \quad 0 < \theta < 1 \quad (2),$$

причем фигурирующие справа в различных степенях дифференциалы dx и dy равны именно тем приращениям Δx и Δy независимых переменных, которые породили приращения функции слева.

Для доказательства введем в рассмотрение новую независимую переменную t , положив $x = x_0 + t\Delta x$; $y = y_0 + t\Delta y$ ($0 \leq t \leq 1$) (3).

Подставив эти значения x и y в функцию $f(x, y)$, получим сложную функцию от одной переменной t :

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Мы знаем, что введенные нами в рассмотрение формулы геометрически выражают прямолинейный отрезок, соединяющий точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Очевидно, вместо приращения $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ мы можем рассматривать приращение вспомогательной функции $\Delta F(0) = F(1) - F(0)$, так как оба приращения равны.

Но $F(t)$ является функцией от одной переменной и имеет $(n+1)$ непрерывных производных; следовательно, применив к ней уже выведенную формулу Тейлора, получим:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!} d^2 F(0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(\theta), \quad 0 < \theta < 1 \quad (4),$$

при этом дифференциал dt , входящий в различных степенях справа, равен $\Delta t = 1 - 0 = 1$.

Пользуясь тем, что при линейной замене переменных свойство инвариантности форм имеет место и для высших дифференциалов, получим

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = df(x_0, y_0)$$

$$d^2F(0) = f''_{x^2}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{y^2}(x_0, y_0)dy^2 = d^2f(x_0, y_0),$$

и так далее.

Наконец, для $(n+1)$ -го дифференциала $d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$.

Важно отметить, что здесь дифференциалы dx и dy ничем не отличаются от взятых ранее приращений Δx и Δy . Действительно, так как $dt=1$, $dx = \Delta x dt = \Delta x$; $dy = \Delta y dt = \Delta y$. Подставив все это в разложение (4) мы и придем к требуемому разложению (2).